Test n^{o}1 (fonctions, limites)

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux
puis *justifier soigneusement votre réponse.*

1) La fonction définie par la formule $f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction définie par la formule $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3) Le domaine de définition naturel de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{8-16x}{(7+x)^2}}$ est $]-\infty, -7[\cup]-7, \frac{1}{2}]$.

4) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires telles que $g \circ f$ est bien définie. Alors $g+f$ est impaire, $g \cdot f$ est paire, et $g \circ f$ est impaire.

5) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ (avec $E \subset \mathbb{R}$) une fonction paire. Si $f|_{E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante alors $f|_{E\cap\mathbb{R}^+}$ est décroissante.

6) L'image du sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $A = [-4, -2[\cup]4, 8]$, par la fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, est l'intervalle $]2, 8]$. (Une justification graphique suffit.)

7) L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - \sin(2x)$ est l'intervalle $[-1, 3]$.

8) L'image réciproque de l'intervalle $[-1, 0]$ par la fonction sinus est l'intervalle $[-\pi, 0]$.

9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. La restriction de f à $]-\infty, \frac{1}{2}[$ est surjective.

10) La fonction définie par l'expression $f(x) = \ln(x^2)$ est injective sur son domaine de définition naturel.

11) La restriction de la fonction cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est bijective.

12) La fonction réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

13) soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction injective. Soit $A \subset E$. La restriction de f à A est une fonction injective.

14) Les limites suivantes existent et sont égales

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5 - 4x^3 + 17)e^{\frac{1}{x}}}{3x^5 - 17x + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^4 - 4x^2 + 17)e^{-\frac{1}{x}}}{6x^4 + 12x - 1} .$$

15) La limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ existe et vaut $\frac{5}{6}$.

16) La limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par la formule $f(x) = \frac{1}{x}(4\sin^2(x) + 3\cos(5x))$ existe et vaut 0.

17) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par la formule

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} .$$

Les deux limites suivantes existent et sont égales:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\ .$$

18) La fonction $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x>0$ par la formule

$$f(x)=\frac{\sin(e^{\cos x}+\ln(x))}{x}$$

n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

19) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction paire. Si $f(x)$ tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$.

20) Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.