

Feuille d'exercices n°9 — Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes, du second ordre suivantes:

1. $y'' - 3y' - 4y = 0$.

2. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Dans chaque cas on déterminera la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 2 - Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 10y = 7e^x$.

2. $y'' - y' - 6y = (6x + 5)e^x$.

3. $y'' - y' - 2y = (6x + 2)e^{2x}$.

4. $y'' + 2y' + y = x^2 + 1$.

5. $y'' + 2y' + y = (6x - 2)e^{-x}$.

6. $y'' - y = 2 \cos x$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y(x) = A \cos x + B \sin x$, avec A, B des constantes réelles à déterminer.

Exercice 3 - Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = x \sin 2x$.

2. $y'' + y = x \sin x + x^2$.

3. $y'' - 5y' + 4y = 2e^{4x} + (34x + 18) \cos x$.

4. $y'' - 4y' + 5y = x \cos x e^{2x}$.

Exercice 4 - Considérons l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \cos(2t),$$

avec $b > 0$ et $b^2 - \omega_0^2 < 0$.

1. Trouvez la solution générale. Donner l'allure des solutions pour $t \rightarrow +\infty$.

2. Déterminez l'unique solution bornée sur tout \mathbb{R} .

Question complémentaire

3. Que dire dans le cas plus général où l'on considère

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega_0^2 y(t) = A \cos(\omega t),$$

avec A, b, ω et ω_0 des réels tels que $b > 0$ et $b^2 - \omega_0^2 < 0$.