Feuille d'exercices n°8 — Nombres complexes

Exercice 1 - Donner les formes cartésienne et polaire des nombres complexes suivants:

$$\text{(a) } 2+i\,,\ \text{(b) } \sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,,\ \text{(c) } 2i(3+i\sqrt{7})\,,\ \text{(d) } \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}\,,\ \text{(e) } (1+i)e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\ \text{(f) } \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2.$$

Exercice 2 - Donner module et argument des nombres complexes suivants:

$$\text{(a) } e^{3i}\,,\ \text{(b) } e^{-7+i}\,,\ \text{(c) } \left(3e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^2\,,\ \text{(d) } e^{i\theta}+e^{2i\theta}\,,\ \text{(e) } e^{e^{i\frac{\pi}{6}}}\,.$$

Exercice 3 - 1. Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

2. Quelles sont les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4 - Exprimer sous forme polaire les racines cubiques de $-12+12i\sqrt{3}$. Même question pour $-4\sqrt{2}(1+i)$.

Exercice 5 - En utilisant les nombres complexes, exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 6 - Écrire sous la forme $z \mapsto az+b$, la similitude directe qui envoie les points $A=(2,1)$ et $B=(3,2)$ respectivement sur les points $A'=(6,-4)$ et $B'=(9,-5)$. Puis préciser ses angle, rapport et centre (s'il existe). Finalement, donner les coordonnées cartésiennes de l'image du point $C=(1,3)$.

Exercice 7 - Écrire sous la forme $z \mapsto az+b$, la similitude directe de centre $C=(1,1)$, d'angle $\theta=\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\lambda=2$.

Exercice 8 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$$\text{(a) } z^2+2z+4=0\,,\quad \text{(b) } z^2+6z+11=0\,,\quad \text{(c) } 2z^4+20z^2+50=0\,.$$

Exercice 9 - On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{C}$ par les formules $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ et $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ pour $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions complexes de l'équation $\sin z=0$ est $\{k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos z=0$?

2. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

3. Montrer que $\overline{(\sin z)}=\sin(\overline{z})$. En déduire que $\mathrm{Re}(\sin z)=\sin(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z))$.

4. Établir une formule similaire pour $\mathrm{Im}(\sin z)$. (Remarque: on peut évidemment établir des formules similaires pour les parties réelle et imaginaire de $\cos z$.)

5. Calculer la dérivée de la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $\varphi(t)=\sin(t+2it)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 10 - On rappelle que les primitives d'une fonction continue, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sont les fonctions $t \mapsto \int^t \mathrm{Re}(\varphi(s))\, ds + i \cdot \int^t \mathrm{Im}(\varphi(s))\, ds$.

1. On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1: $z' = \frac{1}{1+t^2}\, z$.

(a) Montrer que si une fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en est une solution complexe alors ses parties réelle et imaginaire en sont des solutions réelles.

(b) Donner toutes les solutions complexes de l'équation.

2. On considère à présent l'équation $z' = (3t^2 + 2it^3)z$.

(a) Pourquoi la technique précédente ne fonctionne-t-elle pas dans ce cas ?

(b) Calculer une primitive A de la fonction $a(t) = 3t^2 + 2it^3$.

(c) Montrer que les fonctions $z(t) = Ce^{A(t)}$ avec $C \in \mathbb{C}$ sont solutions complexes de l'équation.

Exercices complémentaires.

Exercice 11 - Reprendre l'exercice 6 ci-dessus avec

1. $A = (1, -1)$, $B = (-3, 1)$, $A' = (0, 2\sqrt{2})$, $B' = (2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$, et $C = (1, 2)$.

2. $A = (-3, 3)$, $B = (4, 3)$, $A' = (-3, -2)$, $B' = (-3, 5)$, et $C = (1, 1)$.

Exercice 12 - Reprendre l'exercice 7 ci-dessus avec $C = (-2, 1)$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exercice 13 - Soit z et z' deux nombres complexes distincts. Déterminer toutes les similitudes directes qui échangent z et z'. Quels en sont les angles, rapports et centres (s'ils existent) ?

Exercice 14 - Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\frac{z+\overline{z}}{2}}$ et que $\left| e^{\frac{z-\overline{z}}{2}} \right| = 1$.