Feuille d'exercices n°7 — Équations différentielles (1)

ED linéaires d'ordre 1

Exercice 1 - 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants suivantes:

$$\text{(a) } y' - 5y = t\,, \quad \text{(b) } y' + 3y = e^{-2t}\,, \quad \text{(c) } y' - 2y = t^2 e^{2t}\,, \quad \text{(d) } y' + y = \sin t + 3\sin 2t\,.$$

2. Pour (a), donner la solution qui satisfait $y(0) = \frac{1}{5}$. De même pour (d), avec $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{5}$.

Exercice 2 - Résoudre sur I l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis trouver la solution vérifiant $y(t_0) = y_0$ dans les cas suivants:

1. $I = \mathbb{R}$: $y' - ty = t^3$, avec $t_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = -3$.

2. $I =]0, +\infty[$: $y' + \frac{1}{t}y = 3\cos(2t)$, avec $t_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = 3$.

3. $I =]-1, 1[$: $(t^2 - 1)y' + (t+2)y = (t+1)^{\frac{3}{2}}$, avec $t_0 = 0$ et $y_0 = \frac{8}{3}$.

Exercice 3 - On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1:

$$y' - \frac{2}{1 - t^2}\, y = 1\,. \tag{E}$$

1. Quelles sont les solutions de (E) sur les intervalles où $1 - t^2$ ne s'annule pas ?

2. Quelles fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$?

Exercice 4 - Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue: $ty' - 2y = 0$.

1. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$?

2. Existe-t-il des fonctions continues qui vérifient (E) sur $\mathbb{R}$?

3. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$? Parmi elles, lesquelles vérifient $y(1) = 2$?

ED à variables séparables

Exercice 5 - 1. Trouver les solutions de l'équation différentielle $y' \sin t = y \cos t$ sur l'intervalle $]0, \pi[$, ne s'annulant pas sur cet intervalle.

2. Trouver les solutions des équations différentielles d'ordre 1 suivantes qui vérifient les conditions initiales $y(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ et $y(2) = 1$:

$$\text{(a) } y' - te^{-y} = 0\,, \qquad \text{(b) } yy' = t\,.$$

Exercice 6 - On considère l'équation différentielle $ty' = t - y$ (qui est dite *homogène* car elle peut se mettre sous la forme $y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$ avec g continue).

1. On suppose que y en est solution et on pose $z = \frac{y}{t}$ sur un intervalle où y est définie et qui ne contient pas 0. Quelle équation différentielle (à variables séparables) d'ordre 1 la fonction z vérifie-t-elle ?

2. Résoudre cette équation et en déduire la forme générale de y.

Exercice 7 - Résolvons l'équation différentielle (E): $y = \ln(y')$ grâce à deux méthodes différentes.

1. Résoudre (E) après l'avoir transformée en une équation équivalente via l'exponentielle.

2. Supposons que y soit une solution C^2 de cette équation et posons $u = y'$. Dériver (E) pour obtenir une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par u. Puis résoudre cette seconde équation (attention à l'intervalle de définition) et en déduire la forme générale de y.

Exercices complémentaires.

Exercice 8 - Résoudre en fonction de $k \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle: $ty' - ky = 0$.

Exercice 9 - On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue:

$$(\sin t)\, y' - (\cos t)\, y = e^t \sin^4 t \ . \tag{E}$$

1. Quelles sont les solutions de (E) sur les intervalles où $\sin t$ ne s'annule pas ?

2. Quelles sont les fonctions continues qui vérifient (E) sur $]-\pi, \pi[$?

3. Existe-t-il une solution de (E) sur $]-\pi, \pi[$?

Exercice 10 - On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue suivante:

$$(t^2 - 1)y' - 2ty = t^2 + 8t + 1 \ . \tag{E}$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée (E_0): $(t^2-1)y' - 2ty = 0$, sur les intervalles où $t^2 - 1$ ne s'annule pas.

2. Quelles sont les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$?

3. Déterminer une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R}$. On appelle cette solution P.

4. Exprimer toutes les solutions de (E), en fonction de P.