Feuille d'exercices n°5 — Dérivabilité d'ordre supérieur et DL

Exercice 1 - 1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, bijective et dont la dérivée ne s'annule pas sur E. Trouver la formule donnant $(f^{-1})''$.

2. On considère $f :]e^{-1}, +\infty[\to]-e^{-1}, +\infty[$, définie par la formule $f(x) = x \ln x$. Montrer que f est une bijection C^2.

3. Donner les valeurs de $f^{-1}(0)$, $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})''(0)$.

Exercice 2 - Considérer la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}^*$ est $C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

2. Montrer que f est $C^2(\mathbb{R})$ mais qu'elle n'est pas trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n de la fonction f, lorsque:

1. $f(x) = (\ln(1+x))^2$, avec $n = 4$ et $x_0 = 0$.

2. $f(x) = e^{\sin x}$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

3. $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}))$, avec $n = 2$ et $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

4. $f(x) = \sqrt{1+x}$, avec $n = 2$ et $x_0 = 1$.

Exercice 4 - Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Exercice 5 - Déterminer les valeurs $a \in \mathbb{R}$ telles que la limite suivante existe et soit finie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}$$

Exercice 6 - Quel est le développement limité à l'ordre 3, en $x_0 = 1$ de la fonction: $f(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$?

Exercice 7 - 1. Le point $x_0 = 0$ est-il un point où la fonction $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$ atteint un maximum ou un minimum local ? Dans ce cas, cet extremum est-il global ?

2. Mêmes questions, avec les fonctions

$$g(x) = (\arctan x)^2 - x^2, \quad h(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3.$$

Exercice 8 - On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par la formule

$$f(x) = \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Calculer, si elles existent, les limites de $f(x)$, lorsque x tend respectivement vers $-\infty$, 0 et $+\infty$.

Exercice 9 - Soit f la fonction définie par la formule:

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x(1+x^2)}}{x-1}\,.$$

1. Quel est l'ensemble de définition naturel de cette fonction ?

2. Donner le développement limité à l'ordre 4 du numérateur en $x_0 = 1$.

3. Grâce à l'ordre 1 de ce développement, montrer que f se prolonge par continuité en 1.

4. Ensuite, montrer que la fonction prolongée est dérivable au point 1. Quelle est l'équation de sa tangente en 1 ?

5. Finalement, spécifier localement, autour de 1, la position du graphe de f par rapport à sa tangente.

Exercice 10 - Ci-dessous, les développements limités en 0 de deux fonctions f et g. Esquisser leurs graphes au voisinage de 0 (on fera apparaître les tangentes aux graphes en 0 et les positions respectives des graphes par rapport à leurs tangentes).

$$f(x) = 2 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)\,, \qquad g(x) = -x^{2012} + 5x^{4000} + x^{4020}\varepsilon(x)\,.$$

Exercices complémentaires.

Exercice 11 - Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_k(x) = |x|^k$. Quel est le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f_k soit une fonction C^n sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 - On reprend l'**Exercice 1** ci-dessus.

1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction C^3, bijective et dont la dérivée ne s'annule pas sur E. Trouver la formule donnant $(f^{-1})'''$.

2. On considère $f :]e^{-1}, +\infty[\to]-e^{-1}, +\infty[$, définie par la formule $f(x) = x\ln x$. Montrer que f est une bijection C^3 et donner la valeur $(f^{-1})'''(0)$.

Exercice 13 - Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n de la fonction f, lorsque:

1. $f(x) = \ln(\sin x)$, avec $n = 3$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

Exercice 14 - Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. En appliquant la formule de Taylor–Lagrange à la fonction $h(x) = \ln(1+x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$, pour tout n. Comment utiliser ce résultat pour donner une approximation du nombre irrationnel $\ln(2)$?

Exercice 15 - Calculer les limites suivantes quand x tend vers 0:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\,, \qquad \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}\,, \qquad \frac{1}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^3}\,.$$