Feuille d'exercices n°3 — Continuité

Exercice 1 - Pour quelles valeurs de c, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ (x-c)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? Donner l'allure des fonctions obtenues.

Exercice 2 - Pour quelles valeurs de a et b, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x \in \,]1, e] \\ \ln x & \text{si } x > e \end{cases}$$

est-elle continue ? Donner l'allure de la fonction obtenue.

Exercice 3 - Pour quelles valeurs de c, la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ |x-c| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$? Donner l'allure des fonctions obtenues.

Exercice 4 - Montrer que les deux fonctions ci-dessous sont continues et répondre aux questions suivantes.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{(x-1)^3}$ est injective.

2. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \,]0, +\infty[$, définie par $g(x) = e^{-x^3+x-1}$, est surjective.

Exercice 5 - Soit la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 \sin x + x^2 \cos x + x \sin(2x) + \cos(2x)}{x^2(\sin x)^2 + (\cos x)^2}$$

Vérifier qu'elle est bien définie pour tout x réel. Démontrer qu'elle admet un minimum mais pas de maximum.

Exercice 6 - Donner un exemple (l'esquisse du graphe suffit) de fonction continue bornée qui n'admet ni de minimum ni de maximum sur $[0, 1[$.

Exercice 7 - Donner des exemples de fonction f (éventuellement par son graphe) continue sur $[0, 1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait

1. une unique racine, en $x = \frac{1}{2}$.

2. exactement deux racines distinctes.

3. une infinité de racines.

Exercice 8 - Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $[0,1] \subset f([0,1])$. Le but de cet exercice est de montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

1. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

2. Tracer l'allure du graphe d'une telle fonction f qui ne soit pas monotone.

3. Démontrer qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.

On pose $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [0,1]$.

4. On suppose d'abord que $a < b$. Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à g, que f admet bien un point fixe.

5. Conclure.

Exercice 9 - Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4} + 2x^2$. Les extrema considérés ci-dessous, sont des extrema globaux.

1. Démontrer que cette fonction admet un minimum et un maximum sur $[-a,a]$.

2. Est-il possible qu'elle admette un unique point de minimum et un unique point de maximum ?

3. En étudiant le signe de f au voisinage de 0, démontrer que pour tout $a > 0$ elle admet toujours au moins deux points de maximum.

Exercices complémentaires

Exercice 10 - Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, une fonction continue telle que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. f admet-elle un maximum global ? Admet-elle un minimum global ?

Exercice 11 - Un cycliste parcourt 90 km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est une fonction continue ?

2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 45 km.

3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi élément de I. Qu'en est-il pour 4 points ? Et pour n points ? (On observera que si x_0 et x_1 sont deux points d'un intervalle I, alors tous les points entre x_0 et x_1 appartiennent à I – cf. dernier exercice sur la continuité pour une définition de l'intervalle.)

4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80 minutes pendant le trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 30 km.

5. Généraliser.