Contrôle continu de Mathématiques – Seconde session

Jeudi 23 février 2017 – Durée : 1h30.

Documents, calculatrices, téléphones, etc. interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Que signifie l'affirmation : f est injective sur I ?

(2) (a) Soient f et g des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de $(f \circ g)'$.

 (b) Faire le calcul pour $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = e^{-x}$.

(3) Énoncer le théorème de Weierstrasse.

(4) Qu'est-ce qu'une similitude directe ? (N'oubliez pas d'en donner les caractéristiques...)

Exercice 2. (6 points)

(1) Calculer, quand elles existent, les limites suivantes :

 (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$,

 (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2+\cos x)}{1+x^2}$.

(2) On considère l'équation différentielle (E), $y'' - 3y' - 4y = e^{-t}$, sur $\mathbb{R}$.

 (a) Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.

 (b) Donner toutes les solutions de (E).

 (c) Parmi celles-ci, lesquelles satisfont : $y(0) = \frac{4}{5}$ et $y'(0) = 0$?

Exercice 3. (5 points)

On dénote $\mathbb{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des entiers relatifs. On a donc $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $z + z'$ et zz' y appartiennent aussi.

(2) Montrer que le module d'un élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est supérieur à 1.

(3) En déduire les éléments z de $\mathbb{Z}[i]$ qui admettent un inverse dans $\mathbb{Z}[i]$ (c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ avec $zz' = 1$). Pour chacun d'eux, on explicitera l'inverse.

(4) Montrer que pour tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|w - z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. (N'hésitez pas à illustrer votre démonstration avec un dessin...)

Exercice 4. (6 points)
On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ et la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-x^2}(1 + f(x))$.

(1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer la formule donnant sa dérivée, f'.

(2) Donner le développement limité de f en $x_0 = 0$, à l'ordre 5.

(3) Montrer que f est impaire. La fonction g est-elle impaire ? (Justifier.)

(4) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer g'.

(5) En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont g est une solution.