Contrôle continu de Mathématiques n°3

du jeudi 15 décembre 2016 – Durée : 2h.

Documents, téléphones portables, tablettes, calculatrices et autres gadgets interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barême est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) Soient a et b des nombres complexes avec $a \neq 0$. Donner le nom et les caractéristiques de la transformation qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe $az + b$.

(2) (a) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec x et y des réels). Donner les parties réelle et imaginaire de e^z.

(b) Quels sont les nombres complexes z tels que $e^z = 1$?

(3) Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On appelle $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur $\mathbb{R}$ et on choisit une constante $c \in \mathbb{R}$. Justifier que la fonction

$$y : t \longmapsto e^{-A(t)} \left(c + \int_0^t e^{A(s)} b(s)\, ds \right)$$

est solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sur $\mathbb{R}$ (on justifiera, en particulier, que y est dérivable).

(4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition précise de : « f est continue en $(0, 0)$ ».

Exercice 2. (6 points)

(1) (a) Quel est le domaine de définition D_f de la fonction f définie par $f(t) = \frac{3t-4}{t^2-16}$?

(b) Montrer que $f(t) = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{t+4}$ sur D_f, avec A et B des *constantes* que l'on déterminera.

(c) Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenant 0 à préciser.

(2) (a) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\frac{t}{2})$.

(b) En déduire une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1+2t}{4+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (7 points)

On se donne δ une constante dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_\delta) \qquad \delta y'' + y' + \tfrac{1}{2}\, y = 0\,.$$

(1) Supposons que $\delta = 0$; donner les solutions de l'équation $(\mathrm{E}_0) : y' + \frac{1}{2}\, y = 0$.

(2) Supposons que $\delta = \frac{1}{2}$; résoudre l'équation $(\mathrm{E}_{\frac{1}{2}}) : \frac{1}{2}\, y'' + y' + \frac{1}{2}\, y = 0$.

(3) Supposons maintenant $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

(a) Donner les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_δ) en les notant r_- et r_+, de sorte que $r_- < r_+$.

(b) En déduire les solutions de (E_δ).

On ne voit plus δ comme fixé, mais comme un paramètre libre dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, et on considère r_- et r_+ comme des fonctions de δ.

(4) Donner un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-2x}$.

(5) En déduire les comportements respectifs lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures de
$$\frac{-1+\sqrt{1-2x}}{2x} \qquad \text{et} \qquad \frac{-1-\sqrt{1-2x}}{2x}.$$

(6) On fixe des constantes c_1 et c_2 dans $\mathbb{R}$. On fixe également $t \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite
$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(c_1 e^{\frac{-1-\sqrt{1-2\delta}}{2\delta}t} + c_2 e^{\frac{-1+\sqrt{1-2\delta}}{2\delta}t}\right).$$
Que dire dans les cas $t = 0$ et $t < 0$? (On pourra discuter selon la valeur de c_1.)

(7) Interpréter (intuitivement) ce résultat, au vu notamment de la question (1).

Exercice 4. (7 points)

Soit γ la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \cosh t$ et $y(t) = \sinh t$. (On rappelle que $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.)

(1) On note par $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.
  (a) Montrer que le support de γ est inclus dans $\mathcal{H}$.
  (b) Montrer soigneusement que la fonction $t \mapsto \sinh t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  (c) En déduire que $\mathcal{H}$ est inclus dans le support de γ.

(2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(-t)$ est le symétrique de $\gamma(t)$ par une symétrie que l'on précisera. Qu'en déduire sur $\mathcal{H}$?

(3) La courbe γ admet-elle des points singuliers ?

(4) Donner les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$, puis montrer que la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) est asymptote à γ lorsque $t \to +\infty$.

(5) Tracer le support de γ en spécifiant la partie correspondant à $t \in [0, +\infty[$ et la tangente en $t = 0$.