Correction du contrôle continu de Mathématiques n°3

du jeudi 15 décembre 2016 – Durée : 2h.

Exercice 1. Questions de cours (5,5 points)

(1) Il s'agit d'une similitude directe, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$. Quand $a \neq 1$, elle a un centre, d'affixe $\frac{b}{1-a}$; quand $a = 1$, on a tout simplement affaire à une translation de vecteur (d'affixe) b.

(2) (a) On a $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, par définition de l'exponentielle étendue à $\mathbb{C}$; comme $e^x \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc $\mathrm{Re}(e^z) = \mathrm{Re}(e^x \cdot e^{iy}) = e^x \mathrm{Re}(e^{iy}) = e^x \cos y$, et de même, $\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y$.

(b) Si $e^z = 1$, son module $|e^z| = e^x$ vaut 1, donc $x = 0$, et y, un de ses arguments, vaut $0\,[2\pi]$. Comme réciproquement, il est clair que $e^{iy} = 1$ dès que $y = 0\,[2\pi]$, on a : l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = 1$ est l'ensemble des $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(3) La fonction y est dérivable car A est dérivable en tant que primitive de la fonction continue a, d'où l'on tire la dérivabilité de $e^{\pm A}$, ainsi que de $t \mapsto \int_0^t e^{A(s)} b(s)\,ds$, primitive de la fonction continue $e^A b$ (d'où la conclusion par somme et produit de fonctions dérivables). Calculons y' ; comme $A' = a$, et que la dérivée de $t \mapsto \int_0^t e^{A(s)} b(s)\,ds$ est $e^A b$ on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = -a(t)e^{-A(t)}\left(c + \int_0^t e^{A(s)} b(s)\,ds\right) + e^{-A(t)} e^{A(t)} b(t).$$

Ceci se réécrit : $y' = -ay + b$, *i. e.* y est bien solution de l'équation différentielle proposée.

(4) La continuité de f est $(0,0)$ signifie que f prend des valeurs arbitrairement proches de $f(0,0)$ dès qu'on l'évalue en un point suffisamment proche de $(0,0)$; formellement, ceci donne : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: si $\|(x,y)\| \leq \delta$, alors $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$.

Exercice 2. (6 points)

(1) (a) Comme il s'agit d'éviter l'annulation du dénominateur, on prend pour D_f l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $t^2 - 16 \neq 0$; comme $t^2 - 16 = (t-4)(t+4)$ sur $\mathbb{R}$, on a donc : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$.

(b) Il suffit de mettre sur le même dénominateur le membre de droite pour déterminer que $\frac{3t-4}{t^2-16} = \frac{A(t+4)+B(t-4)}{t^2-16} = \frac{(A+B)t+4(A-B)}{t^2-16}$ sur D_f. Par identification des numérateurs, on obtient que $A + B = 3$ et $A - B = -1$, *i. e.* $A = 1$ et $B = 2$.

(c) En prenant garde aux signes, on trouve d'après la question précédente $F : t \mapsto \ln|t-4| + 2\ln|t+4| = \ln(4-t) + 2\ln(4+t)$ comme primitive de f sur l'intervalle $I :=]-4, 4[$ (le plus grand sous-intervalle de D_f contenant 0). Toutes les primitives de f sur I sont donc de la forme $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(2) (a) En se rappelant que arctan a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on a par dérivation des fonctions composées, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(t/2)^2} = \frac{1}{4+t^2}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}$, on a $\frac{1+2t}{4+t^2} = \frac{1}{4+t^2} + \frac{2t}{4+t^2}$, avec bien entendu $4 + t^2 > 0$. Comme en outre $\frac{d}{dt}(4 + t^2) = 2t$, on en déduit à l'aide de la question précédente que $t \mapsto \frac{1+2t}{4+t^2}$ admet la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + \ln(4 + t^2)$ comme primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (7,5 points)

(1) C'est du cours ; il s'agit des $t \mapsto Ce^{-t/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

(2) C'est encore du cours. On passe par l'équation caractéristique $\frac{1}{2}r^2 + r + \frac{1}{2} = 0$, qui se réécrit $\frac{1}{2}(r^2 + 2r + 1) = 0$, dont la solution *double* est -1. Les solutions de $(\mathrm{E}_{\frac{1}{2}})$ sont donc les $t \mapsto (At + B)e^{-t}$, A, $B \in \mathbb{R}$.

(3) (a) L'équation caractéristique associée à (E_δ) est $\delta r^2 + 1 + \frac{1}{2} = 0$, de discriminant $1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta = 1 - 2\delta > 0$ (on a $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$). Les deux solutions de l'équation caractéristique sont donc

$$r_- = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2\delta}}{2\delta} \qquad \text{et} \qquad r_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\delta}}{2\delta}$$

(et on a bien $r_- < r_+$).

(b) D'après la question précédente (et les notations utilisées), le cours (encore et toujours) nous dit que les solutions de (E_δ) sont les $t \mapsto c_1 e^{r_- t} + c_2 e^{r_+ t}$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(4) Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sqrt{1 + h}$ étant $1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$, on en déduit, par composition des développements limités, pour x au voisinage de 0, que

$$\sqrt{1 - 2x} = 1 - x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

(5) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$ petit,

$$\frac{-1 - \sqrt{1 - 2x}}{2x} = \frac{-1 - [1 - x + x\varepsilon(x)]}{2x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$. Il est alors clair que : $\lim_{x \to 0^+} \frac{-1 - \sqrt{1-2x}}{2x} = -\infty$.

De même, pour tout $x > 0$ petit,

$$\frac{-1 - \sqrt{1 - 2x}}{2x} = \frac{-1 + [1 - x + x\varepsilon(x)]}{2x} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$; on en déduit : $\lim_{x \to 0^+} \frac{-1 + \sqrt{1-2x}}{2x} = -\frac{1}{2}$.

(6) On fixe $t > 0$. On a d'après la question précédente la limite $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t = -\infty$, donc $\lim_{\delta \to 0^+} e^{\frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} = 0$, tandis que $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t = -\frac{1}{2} t$, donc $\lim_{\delta \to 0^+} e^{\frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} = e^{-\frac{1}{2} t}$.
En conclusion, pour tout $t > 0$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(c_1 e^{\frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} + c_2 e^{\frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} \right) = c_2 e^{-\frac{1}{2} t}.$$

Dans le cas $t = 0$, on a bien sûr $\lim_{\delta \to 0^+} \left(c_1 e^{\frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} + c_2 e^{\frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} \right) = c_1 + c_2$, la quantité sous la limite valant $c_1 + c_2$ indépendamment de δ. Dans le cas $t < 0$, on a $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t = +\infty$, et donc $\lim_{\delta \to 0^+} e^{\frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} = +\infty$. La limite $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t = -\frac{1}{2} t$ restant valide, on en déduit que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(c_1 e^{\frac{-1 - \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} + c_2 e^{\frac{-1 + \sqrt{1-2\delta}}{2\delta} t} \right) = \pm\infty$$

dès que $c_1 \neq 0$ (avec $+$ si $c_1 > 0$, $-$ si $c_1 < 0$). Si d'autre part $c_1 = 0$, on obtient à nouveau $c_2 e^{-\frac{1}{2} t}$ comme limite.

(7) Dans le cas $t > 0$, le résultat de la question précédente peut se reformuler en disant que si l'on fixe les constantes c_1 et c_2, alors les solutions des (E_δ) tendent (point par point) vers une solution de (E_0) lorsque $\delta \to 0$, du moins sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les cas $t = 0$ et $t < 0$ nous disent que ceci reste valide sur $\mathbb{R}$, à condition de fixer $c_1 = 0$ (on obtient bien une fonction solution de (E_0) sous cette condition ; si elle n'est pas vérifiée, la fonction limite n'est pas continue à droite en 0, et n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$).

Exercice 4. (6,5 points)

(1) (a) Tout point du support de γ, c'est-à-dire tout point $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, vérifie l'équation $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$, d'où le résultat.

(b) La fonction sinh est continue, et admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) comme limite en $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) (par sommation des limites d'exp en $\pm\infty$). Elle est de plus dérivable, de dérivée $\cosh > 0$. D'après Weierstrass généralisé (surjectivité) et par stricte monotonie (injectivité), sinh est donc bijective en tant que fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) *Erratum : il fallait ajouter une condition du type $x \geq 0$ à la description de $\mathcal{H}$ pour que tout fonctionne bien ; ceci n'a heureusement lésé personne.*

Soit $(x, y) \in \mathcal{H}$; on a donc $x^2 = 1 + y^2$, soit $x \in \{\pm\sqrt{1+y^2}\}$, et donc $x = \sqrt{1+y^2}$ car $x \geq 0$. D'après la question précédente, on peut écrire $y = \sinh t$ pour un (unique) $t \in \mathbb{R}$. On a alors $x = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+(\sinh t)^2} = \sqrt{(\cosh t)^2} = \cosh t \geq 0$, c'est-à-dire : $(x, y) = (\cosh t, \sinh t) = \gamma(t)$, donc $(x, y) \in \mathrm{supp}(\gamma)$. Ceci étant vrai pour tout point de $\mathcal{H}$, on a $\mathcal{H} \subset \mathrm{supp}(\gamma)$.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme cosh est paire et sinh impaire, on a $\gamma(-t) = (\cosh t, -\sinh t)$: $\gamma(-t)$ est l'image de $\gamma(t)$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit que $\mathcal{H}$ (qui n'est autre que $\mathrm{supp}(\gamma)$ par (1-a,c)) est symétrique par rapport à cet axe.

(3) On a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. De plus, pour tout t, $x(t) - y(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \frac{e^t-e^{-t}}{2} = e^{-t}$, ce qui tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$; la première bissectrice est donc asymptote à γ pour le paramètre t tendant vers $+\infty$.

(4) *Cf.* ci-dessous. La partie de la courbe correspondant aux $t \geq 0$ est celle située au-dessus de l'axe des abscisses. Comme $\dot{\gamma}(0) = (\sinh 0, \cosh 0) = (0, 1)$, on a une tangente verticale au point $(1, 0)$ de paramètre $t = 0$.