Contrôle continu de Mathématiques n°2

du jeudi 10 novembre 2016 – Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. Questions de cours (4 points)

(1) Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

(a) Énoncer la définition de "f est dérivable en x_0".

(b) Énoncer la définition de "f est C^3 (ou de classe C^3) sur I".

(c) On suppose que f est C^3 sur I. Écrire le développement limité de f en x_0 donné par la formule de Taylor–Young. Quel est son ordre ?

(2) Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2. (8 points)

(1) (a) Donner, en utilisant la formule de Taylor–Young, le développement limité de la fonction cosinus en 0 à l'ordre 3.

(b) De même, donner le développement limité de la fonction exponentielle en 1, à l'ordre 3.

(c) En déduire le développement limité en 0, à l'ordre 3, de la fonction $f(x) = e^{\cos x}$.

(2) Calculer la limite quand x tend vers 0 de

$$\frac{e^x - e^{\frac{x}{2}}}{\sin(2x)}.$$

(3) (a) Donner le développement limité de $g(x) = \ln(1 + x)$ en 0 à l'ordre 2.

(b) Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right).$$

(4) *On rappelle que pour a et $b > 0$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ et $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.*
Soit $x > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que $\ln(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{c}$.

(b) En déduire que $(\frac{x+1}{x})^x < e < (\frac{x+1}{x})^{x+1}$.
(Indications. Utiliser (a) pour comparer $x \ln(\frac{x+1}{x})$, $(x + 1) \ln(\frac{x+1}{x})$ et 1.)

Exercice 3. (6 points)

(1) On considère la fonction $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.

(a) Que dit le théorème de Weierstrass appliqué à f ? (Justifier *pourquoi* on peut l'appliquer.)

(b) Déterminer les points critiques de f.

(c) Déterminer les extrema locaux de f ainsi que les points où ils sont atteints.

(d) Même question pour les extrema globaux.

(2) On considère maintenant la fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\pi x^3)$.

(a) Déterminer les points critiques de g.

(b) Parmi ces points critiques, spécifier lesquels correspondent à des extrema locaux.

Exercice 4. (6 points)

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert.

(1) Soient a et b des éléments de I avec $a < b$. Quelle est l'équation de la droite (AB) passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$?

On dit que f est *convexe* sur I si pour tous $a < b$ dans I, et tout x dans $[a, b]$, le point $(x, f(x))$ est sous le point de (AB) d'abscisse x.

(2) Vérifier (en expliquant) que f est convexe sur I si et seulement si :

$$\text{pour tous } a < b \text{ de } I \text{ et tout } x \in [a, b], \qquad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\,.$$

(3) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
(Indications. On pourra d'abord se ramener à l'étude du signe d'un polynôme de la forme $P(x) = x^2 - (a + b)x + ab$ avec $a < b$.)

On suppose maintenant f de classe C^2 sur I.

(4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(b - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

(Indications. Pour la première inégalité, utiliser la définition de convexité de la question (2) *avec $x = a + \varepsilon$.)*

(5) En déduire que pour tous $a < b$ dans I,

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)\,.$$

(6) En déduire que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

(7) En déduire que toute fonction C^2 et convexe sur I est au-dessus de sa tangente localement près de tout $x_0 \in I$ tel que $f''(x_0) \neq 0$.