Correction du contrôle continu de Mathématiques n°2
du jeudi 10 novembre 2016 – Durée : 2h.

Exercice 1. (4 points)

(1) (a) f est dérivable en x_0 si la limite quand x tend vers x_0 de $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ existe.

(b) f est C^3 sur I si elle y est trois fois dérivable et si sa dérivée troisième y est continue.

(c) Comme f est C^3, la formule de Taylor–Young nous assure qu'elle admet un développement limité en x_0 à l'ordre 3, donné par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + (x-x_0)^3\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers x_0.

(2) Soit f une fonction continue sur un intervalle non-vide $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 2. (8 points)

(1) (a) Cosinus étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle y est en particulier C^3. Les coefficients du développement limité donnés par la formule de Taylor–Young sont d'après l'exercice 1, question (1c):

$$\cos x = \cos 0 + (-\sin 0)x + \frac{-\cos 0}{2}x^2 + \frac{\sin 0}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\,.$$

(b) De même, $x \mapsto e^x$ est C^∞ (donc C^3) sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont toutes égales à e^x. On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(1) = e^1 = e$ et il vient par conséquent :

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0\,.$$

(c) Comme la fonction cosinus vaut 1 en 0, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e + e\big(-\tfrac{x^2}{2}\big) + \tfrac{e}{2}\big(-\tfrac{x^2}{2}\big)^2 + \tfrac{e}{6}\big(-\tfrac{x^2}{2}\big)^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= e - \tfrac{e}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\,. \end{aligned}$$

(2) Par Taylor–Young, on sait que $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ et donc que $e^x - e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

De même le développement limité de sinus en 0 à l'ordre 1 est $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit finalement que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\frac{x}{2}}}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)}{2x+x\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)}{2+\varepsilon(x)} = \frac{1}{4}\,.$$

(3) (a) De nouveau, on applique Taylor–Young à la fonction g qui est C^∞ sur $]-1,+\infty[$. Comme $g(0) = \ln(1) = 0$, que $g'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ et que $g''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$, on obtient :

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\,.$$

(b) On commence par écrire $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$ et on en déduit que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{x^2+x^2\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

(4) (a) Comme x et (donc !) $x+1$ sont strictement positifs, on peut écrire $\ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(x+1) - \ln(x)$. Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $[x, x+1] \subset]0,+\infty[$ et dérivable sur $]x, x+1[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur cet intervalle. On obtient l'existence d'un $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = (\ln)'(c) = \frac{1}{c}$, ce qui conclut.

(b) Comme $0 < x < c < x+1$, on a les inégalités
$$x\ln(x+1) = \tfrac{x}{c} < 1 < \tfrac{x+1}{c} = (x+1)\ln(x+1)\,.$$
On conclut en utilisant le fait que $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$$e^{x\ln(x+1)} = (\tfrac{x+1}{x})^x < e < e^{(x+1)\ln(x+1)} = (\tfrac{x+1}{x})^{x+1}\,.$$

Exercice 3. (6 points)

(1) (a) Sinus étant continue sur l'intervalle fermé, borné $[0, 3\pi]$, le théorème de Weierstrass assure qu'elle y est bornée et y atteint ses bornes.

(b) Les points critiques de f correspondent aux points qui annulent sa dérivée. Or $f'(x) = \cos x$ s'annule si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Seuls $k = 0$, 1, et 2 donnent des points de $[0, 3\pi]$. En conclusion, les points critiques de f sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$.

(c) Comme f est C^1 sur $[0, 3\pi]$, ses extrema locaux ne peuvent être atteints qu'en un point crtitique de $]0, 3\pi[$ ou en 0 ou 3π. Les seules possibilités sont donc 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ et 3π.

Comme $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 1$ qui est le maximum (global, sur $\mathbb{R}$) de sinus, en ces points sont atteints des maxima locaux, tandis que $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ est un minimum local de f.

Finalement aux bornes, comme f est strictement positive à droite de 0 et à gauche de 3π, $f(0) = f(3\pi) = 0$ sont deux minima locaux.

(d) D'après l'étude précédente, le minimum global de f sur $[0, 3\pi]$ qui est -1 est atteint en $\frac{3\pi}{2}$, tandis que le maximum global, 1, est quant à lui atteint en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$.

(2) (a) On dérive la fonction (qui est C^1 par composition) pour trouver que $g'(x) = 3\pi x^2\cos(\pi x^3)$. Ses points critiques sont donc atteints en $x = 0$ ou $\pi x^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette seconde possibilité est équivalente à $x^3 = \frac{1}{2} + k$ qui appartient à $[-1, 1]$ (qui est l'image de $[-1, 1]$ par la fonction $x \mapsto x^3$) pour $k = 0$ et $k = -1$. On obtient donc trois points critiques de g: $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (pour $k = -1$), 0, et $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (pour $k = 0$).

(b) L'aplication $x \mapsto \pi x^3$ est strictement croissante, donc le comportement de g en x est le même que celui de sinus en πx^3. Ceci permet de conclure immédiatement que pour $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\pi x^3 = -\frac{\pi}{2}$ qui correspond donc à un minimum local, et pour $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\pi x^3 = \frac{\pi}{2}$ qui correspond à un maximum local.

Le point 0 quant à lui est un point d'inflexion puisque $\pi\, 0^3 = 0$ n'est pas un extremum local de sinus. (Voir aussi la ***Remarque 1*** ci-dessous.)

Exercice 4. (6 points)

(1) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Comme de plus elle passe par le point A, on obtient son équation $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

(2) L'inégalité est équivalente au fait que le point de coordonnées $(x, f(x))$, qui est le point du graphe de f d'abscisse x est sous le point de coordonnées $(x, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a))$ qui est le point de la droite (AB) d'abscisse x par la question précédente.
Ceci étant vrai pour tous $a < b$ et tout x entre a et b, on retrouve bien la définition de convexité.

(3) D'après la définition précédente, la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe si et seulement si pour tous $a < b$ et tout x entre a et b: $x^2 \leq \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) + a^2 = (b+a)(x-a) + a^2 = (b+a)x - ab$ i.e $P(x) \leq 0$ pour tout x entre a et b.
Le discriminant de P est $\Delta = (b+a)^2 - 4ab = (b-a)^2 > 0$ et P admet donc deux racines réelles données par $\frac{-(a+b)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ i.e a et b. (Voir aussi la ***Remarque 2*** ci-dessous.)
Puisque P est du signe opposé de celui de son coefficient dominant entre ses racines, $P(x) \leq 0$ sur $[a, b]$. Comme ceci est vrai pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(4) Pour tout ε dans $]0, b-a[$, $x = a + \varepsilon$ est dans $[a, b]$. Comme f est convexe, on obtient alors que $f(a+\varepsilon) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\varepsilon + f(a)$ ce qui conduit à $f(a+\varepsilon) - f(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\varepsilon$ et donc à la première

inégalité recherchée puisque $\varepsilon > 0$.
Pour la seconde inégalité on procède de même avec $x = b - \varepsilon \in]a, b[$. On obtient $f(b-\varepsilon) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-\varepsilon-a) + f(a) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\varepsilon$ qui conduit à $f(b) - f(b-\varepsilon) \ge \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\varepsilon$ et donc à la seconde inégalité.

(5) On remarque en posant $u = b - \varepsilon$ que $\frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{f(b)-f(u)}{b-u}$ et donc que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{u\to b^-} \frac{f(b)-f(u)}{b-u}$. Comme la fonction f est supposée C^2, elle est en particulier C^1 en b et la limite existe bien puisque c'est la dérivée (à gauche) de f en b.
De même on remarque que la quantité de gauche dans l'encadrement de la question (4) converge vers la dérivée (à droite) de f en a ce qui permet de conclure.

(6) Comme f est C^2, sa dérivée f' est C^1. De plus f' est croissante sur I par la question précédente et sa dérivée, f'', y est donc positive ou nulle.

(7) Si la fonction est C^2 en x_0, par la formule de Taylor–Young, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers x_0. Si f est convexe et que $f''(x_0) \neq 0$, on a alors

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\big) = \tfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$$

avec $\frac{f''(x_0)}{2} > 0$ par la question (6), ce qui traduit exactement le fait que le graphe de f est au-dessus de sa tangente près de x_0.

Remarque 1. *On peut aussi remarquer g est impaire comme composition de fonctions impaires et non constante près de 0; elle ne peut donc pas avoir 0 comme extremum local. Ou l'on peut encore remarquer que près de 0: à gauche $g(x) < 0$ alors qu'à droite $g(x) > 0$. Ou l'on peut aussi étudier le sens de variation de g près de 0...*

Remarque 2. *(i) Comme $b > a$, $\sqrt{\Delta} = |b-a| = b-a$. Si l'on avait écrit Δ comme $(a-b)^2$, il fallait faire attention au fait que $\sqrt{\Delta} = |a-b| = b-a$.*
(ii) On pouvait remarquer directement que P est le polynôme unitaire dont les racines sont a et b puisqu'il s'écrit comme $x^2 - sx + p$ avec s la somme, $a+b$, et p le produit, ab, de a et b.