CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES n°1

du mercredi 5 octobre 2016 – Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 5 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barème donné est indicatif.

Exercice 1. Questions de cours (3 points)

(1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ (avec ε, ...).

(2) Rappeler la définition de fonction surjective.

(3) Énoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2. (6 points) On suppose connue la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0.

Déterminer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$.

(2) $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)\tan(2x)}{x\tan(4x)}$.

(3) $\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$.

(4) $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\sin\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)$.

Exercice 3. (6 points)
Dans cet exercice, on veut étudier la fonction f définie par $f(x) = \ln(x - \sqrt{x})$.

(1) Montrer que le domaine de définition naturel de f est $D_f =]1, +\infty[$.

(2) Montrer que f est continue sur D_f.

(3) Calculer $\lim_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(4) Dans cette question, on cherche à montrer que f est strictement monotone sur D_f.

   (a) Montrer que, pour tous x et y tels que $y \geq x \geq 1$, on a $\sqrt{y} + \sqrt{x} \geq 1$.

   (b) En déduire que pour x et y tels que $y \geq x \geq 1$, $y - x \geq \sqrt{y} - \sqrt{x}$.

   (c) Conclure que f est strictement monotone sur D_f et préciser son sens de variation.

(5) Conclure que f établit une bijection de D_f sur un ensemble à déterminer.

Exercice 4. (4 points) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $\sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g$. Le but de cet exercice est de prouver que leurs graphes se croisent nécessairement.
(On rappelle que pour une fonction quelconque $u : E \to F$, le supremum de u sur E est le supremum de l'image de u: $\sup_E u = \sup\{u(x) \mid x \in E\}$.)

(1) Représenter graphiquement un exemple de deux telles fonctions f et g.

(2) Justifier l'existence d'éléments a et b dans $[0,1]$ tels que l'on ait respectivement $\sup_{[0,1]} f = f(a)$ et $\sup_{[0,1]} g = g(b)$.

(3) On suppose que $a < b$ et on appelle h la restriction à $[a,b]$ de la fonction $f - g$. Démontrer que h s'annule en au moins un point, puis conclure que les graphes de f et g se croisent.

(4) Prouver que les graphes de f et g se croisent aussi si $b \geq a$.

(5) Représenter graphiquement un exemple de deux fonctions $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ non nécessairement continues telles que $\sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g$ mais dont les graphes ne se croisent pas.

Exercice 5. (4 points) On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

(2) Énoncer et démontrer la réciproque.