Correction du contrôle continu de Mathématiques n°1
du mercredi 05 octobre 2016 – Durée : 2h.

Exercice 1. (3 points)

(1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x<-A \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$

(2) Une fonction $f : I \to J$ est dite surjective si tout élément de J admet au moins un antécédent dans I par f. Avec les quantificateurs, $f : I \to J$ est surjective s'écrit:

$$\forall y\in J,\ \exists x\in I,\ f(x)=y.$$

(3) Théorème des valeurs intermédiaires : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, alors tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a,b]$ par f.

Exercice 2. (6 points)

(1) On remarque, en faisant intervenir la quantité conjuguée, que pour tout $x \geq 3$,

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}=+\infty$. Donc, par somme de limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=+\infty,$$

et par quotient de limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=0.$$

(2) Pour $x\neq 0$ dans $]-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}[$,

$$\frac{\sin(x)\tan(2x)}{x\tan(4x)} = \frac{\sin(x)\sin(2x)\cos(4x)}{x\cos(2x)\sin(4x)} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{\cos(4x)}{2(\cos(2x))^2}$$

car $\sin(4x)=\sin(2\cdot 2x)=2\sin(2x)\cos(2x)$. Comme $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim_{x\to0}\cos(4x)=\lim_{x\to0}\cos(2x)=1$, on a par produit de limites

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\tan(2x)}{x\tan(4x)}=\frac{1}{2}.$$

(3) On sait que $\lim_{x\to0^+} 2+x=2$ et $\lim_{x\to0^+} x^2\ln(x)=0^-$, par croissances comparées. Par quotient de limites,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+2}{x^2\ln(x)}=-\infty.$$

(4) Pour $x>0$, $-\sqrt{x}\leq\sqrt{x}\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})\leq+\sqrt{x}$. Or, $\lim_{x\to0^+}-\sqrt{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)=0$.

Exercice 3. (6 points)

(1) Comme la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est bien définie sur l'ensemble des réels x tels que $x-\sqrt{x}>0$. Or cette condition est équivalente à $x>1$. Le domaine de définition naturel de f est donc $D_f=]1;+\infty[$.

(2) La fonction $x\mapsto x-\sqrt{x}$ est continue sur $]1;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$; ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition, f est continue sur D_f.

(3) Comme $\lim_{x\to1^+} x-\sqrt{x}=0^+$ et $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, par composition de limites, on a $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$.

Pour $x\in D_f$, $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$. Ainsi, par produit de limites, comme $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=+\infty$. Puisque d'autre part $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, par composition de limites, on a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(4) (a) Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[1; +\infty[$, pour $y \geq x \geq 1$, on a $\sqrt{y} \geq \sqrt{x} \geq 1$ et donc $\sqrt{y} + \sqrt{x} \geq 2 \geq 1$ (on peut aussi affirmer $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 1$).

(b) Soit $y \geq x \geq 1$. En multipliant les deux termes de l'inégalité précédente par $\sqrt{y} - \sqrt{x}$, qui est positif (toujours par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[1; +\infty[$), on obtient: $y - x \geq \sqrt{y} - \sqrt{x}$ (si on choisit $y > x$, on obtient même $y - x > \sqrt{y} - \sqrt{x}$).

(c) Soient $x, y \in D_f$, tels que $y > x$. On a remarqué dans la question précédente que $y - x > \sqrt{y} - \sqrt{x}$, soit encore $y - \sqrt{y} > x - \sqrt{x} > 0$, ce qui, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ donne $f(y) > f(x)$: on a bien montré que f est strictement croissante sur D_f.

(5) La fonction f est strictement croissante sur D_f donc injective, elle établit donc une bijection de D_f sur son image. Comme f est continue, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, son image est $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$: f établit donc une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (5 points)

(1) Voir ci-dessous en question (5).

(2) La fonction f est continue sur le segment $[0; 1]$, donc d'après le théorème de Weierstrass, elle est bornée et atteint ses bornes: en particulier, il existe $a \in [0; 1]$ tel que $\sup_{[0;1]} f = f(a)$. De même pour g, il existe $b \in [0; 1]$ tel que $\sup_{[0;1]} g = g(b)$.

(3) La fonction h est continue sur $[a; b]$, comme différence de fonctions continues sur $[a; b]$. De plus,

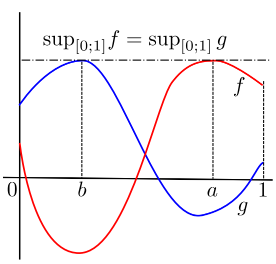
$$h(a) = f(a) - g(a) = \sup_{[0;1]} f - g(a) = \sup_{[0;1]} g - g(a) \geq 0\,,$$
$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - \sup_{[0;1]} g = f(b) - \sup_{[0;1]} f \leq 0\,.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a; b]$, h s'annule en au moins un point de $[a; b]$. En un tel point, f et g prennent la même valeur et donc leurs graphes se croisent.

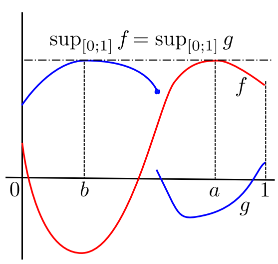
(4) Si $b < a$, on raisonne comme à la question précédente, mais sur $[b; a]$. Si $a = b$, les graphes de f et g se croisent au point d'abscisse $a = b$.

(5) Le premier dessin ci-dessous illustre la situation décrite par les questions (1) à (4) (avec $b < a$). Le dessin de droite montre que la continuité des fonctions f et g est essentielle.

f et g continues



f continue, g discontinue



Exercice 5. (4 points)

(1) On raisonne par l'absurde, en supposant f non strictement décroissante, c'est-à-dire qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$. Alors, par croissance de $f \circ f$, on aurait $f \circ f \circ f(x) = f \circ f(f(x)) \leq f \circ f(f(y)) = f \circ f \circ f(y)$, ce qui contredit la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$. C'est une contradiction, donc on a bien f strictement décroissante.

(2) La réciproque s'énonce simplement: "Si f est strictement décroissante, alors $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante". Elle est évidemment vraie car la composée de deux fonctions strictement décroissantes est strictement croissante (a fortiori croissante), et la composée d'une fonction strictement croissante par une fonction strictement décroissante est strictement décroissante.