Feuille d'exercices n°6 — Intégration

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué (et après en avoir justifié la validité...).

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$, en utilisant le changement de variable $u(x) = e^x$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$, en utilisant le changement de variable $u(x) = \cos x$.

3. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$, en utilisant le changement de variable $u(x) = \ln(x)$.

Exercice 2 - Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties:

$$\text{(a)} \int_0^1 t^2 e^t\, dt\,, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(1+\cos t)\, dt\,, \qquad \text{(c)} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\, dt\,.$$

Exercice 3 - En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_1^e \cos(\pi \ln x)\, dx\,, \qquad J = \int_1^e \sin(\pi \ln x)\, dx\,.$$

Exercice 4 - Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Exercice 5 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

$$\text{(a) } x(x^3+1)\,, \quad \text{(b) } \frac{1}{x-3}\,, \quad \text{(c) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\,, \quad \text{(d) } \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}\,, \quad \text{(e) } \tan^2(x)\,.$$

Exercice 6 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes, grâce à une intégration par parties:

$$\text{(a) } (x+1)e^{-x}\,, \quad \text{(b) } \ln(x)\,, \quad \text{(c) } \ln^2(x)\,, \quad \text{(d) } e^x \sin x\,, \quad \text{(e) } \sin(\ln x)\,.$$

Exercice 7 - Calculer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable si nécessaire:

$$\text{(a)} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx\,, \qquad \text{(b)} \int \frac{\sin x}{1-\cos x}\, dx\,, \qquad \text{(c)} \int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

Exercice 8 - Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$f(x) = x(\ln x)^2\,, \qquad g(x) = e^{2x}\sin(3x)\,, \qquad h(x) = e^{\cos(x)}\sin(2x)\,.$$

Exercice 9 - Décomposer les fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive:

$$\text{(a) } \frac{2x+3}{x^2-4}\,, \qquad \text{(b) } \frac{x^2+1}{x^2-1}\,, \qquad \text{(c) } \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,, \qquad \text{(d) } \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}\,.$$

Exercice 10 - On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.

Exercices complémentaires.

Exercice 11 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

$$\text{(a)}\ \sin^2(x)\,, \quad \text{(b)}\ \cos^4(x)\,, \quad \text{(c)}\ \frac{1}{(2x+5)^3}\,.$$

Exercice 12 - Déterminer une primitive de $x \mapsto xe^x$. En déduire les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^\pi xe^x \sin(2x)\,dx\,, \qquad J = \int_0^\pi xe^x \cos(2x)\,dx\,.$$

Exercice 13 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes, grâce à une intégration par parties:

$$\text{(a)}\ (x^2+x+1)e^{2x}\,, \quad \text{(b)}\ e^{-2x}\cos^2 x\,, \quad \text{(c)}\ \sqrt{x}\ln x\,, \quad \text{(d)}\ e^x\cos^2(x)\,, \quad \text{(e)}\ x\arctan x\,.$$

Exercice 14 - Calculer une primitive de la fonction définie par $f(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 15 - Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$.

Exercice 16 - Soit f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction F par la formule $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$.

1. Écrire cette formule en fonction de f, g et H une primitive de h.

2. Montrer que F est de classe C^1.

3. Supposons que f soit C^m, que g soit C^n et h soit C^p. Que peut-on dire de la fonction F ?