

## Feuille d'exercices n°3 — Continuité

**Exercice 1** - Pour quelles valeurs de  $c$ , la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ (x - c)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? Donner l'allure des fonctions obtenues.

**Exercice 2** - Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ , la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x \in ]1, e] \\ \ln x & \text{si } x > e \end{cases}$$

est-elle continue ? Donner l'allure de la fonction obtenue.

**Exercice 3** - Pour quelles valeurs de  $c$ , la fonction  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ |x - c| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}$  ? Donner l'allure des fonctions obtenues.

**Exercice 4** - Montrer que les deux fonctions ci-dessous sont continues et répondre aux questions suivantes.

1. Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -e^{(x-1)^3}$  est injective.
2. Montrer que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ , définie par  $g(x) = e^{-x^3+x-1}$ , est surjective.

**Exercice 5** - Soit la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 \sin x + x^2 \cos x + x \sin(2x) + \cos(2x)}{x^2(\sin x)^2 + (\cos x)^2}$$

Vérifier qu'elle est bien définie pour tout  $x$  réel. Démontrer qu'elle admet un minimum mais pas de maximum.

**Exercice 6** - Donner un exemple (l'esquisse du graphe suffit) de fonction continue bornée qui n'admet ni de minimum ni de maximum sur  $[0, 1[$ .

**Exercice 7** - Donner des exemples de fonction  $f$  (éventuellement par son graphe) continue sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(0)f(1) < 0$  et telle que l'équation  $f(x) = 0$  ait

1. une unique racine, en  $x = \frac{1}{2}$ .
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

**Exercice 8** - Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $[0, 1] \subset f([0, 1])$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$ .

1. La fonction  $f$  est-elle majorée ? Est-elle minorée ?
2. Tracer l'allure du graphe d'une telle fonction  $f$  qui ne soit pas monotone.
3. Démontrer qu'il existe  $a, b \in [0, 1]$  tels que  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 1$ .

On pose  $g(x) = f(x) - x$  pour  $x \in [0, 1]$ .

4. On suppose d'abord que  $a < b$ . Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à  $g$ , que  $f$  admet bien un point fixe.
5. Conclure.

**Exercice 9** - Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on considère la fonction  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la formule  $f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4} + 2x^2$ . Les extrema considérés ci-dessous, sont des extrema globaux.

1. Démontrer que cette fonction admet un minimum et un maximum sur  $[-a, a]$ .
2. Est-il possible qu'elle admette un unique point de minimum et un unique point de maximum ?
3. En étudiant le signe de  $f$  au voisinage de 0, démontrer que pour tout  $a > 0$  elle admet toujours au moins deux points de maximum.

### *Exercices complémentaires*

**Exercice 10** - Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ , une fonction continue telle que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .  $f$  admet-elle un maximum global ? Admet-elle un minimum global ?

**Exercice 11** - Un cycliste parcourt 90 km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction donnant la distance parcourue jusqu'à un instant  $t$  est une fonction continue ?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 45 km.
3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle  $I$ , alors leur moyenne est aussi élément de  $I$ . Qu'en est-il pour 4 points ? Et pour  $n$  points ? (On observera que si  $x_0$  et  $x_1$  sont deux points d'un intervalle  $I$ , alors tous les points entre  $x_0$  et  $x_1$  appartiennent à  $I$  - cf. dernier exercice sur la continuité pour une définition de l'intervalle.)
4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80 minutes pendant le trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 30 km.
5. Généraliser.