Feuille d'exercices n°11 — Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - On définit les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3\,, \quad f_2(x,y) = \frac{yx^2}{2}\,, \quad f_3(x,y) = y\,e^{xy^2}\,.$$

1. Calculer leurs dérivées partielles en (x_0, y_0) et déterminer leurs points critiques.

2. Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f_2 au point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(2,1,2)$.

Exercice 2 - On cherche les triangles de périmètre fixé dont la surface est maximale. On rappelle la formule de Héron d'Alexandrie donnant l'aire d'un triangle A en fonction de la longueur de ses côtés a, b et c et de son demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Pour simplifier le problème on s'intéresse aux triangles de périmètre 2.

1. Exprimer A en fonction de a et b, $A = f(a,b)$.

2. Représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction f.

3. Pourquoi les côtés d'un triangle de périmètre 2 sont-ils tous de longueur inférieure à 1 ?

4. Pourquoi chercher à maximiser A est-il équivalent à chercher à maximiser A^2 ?

5. Déterminer les points critiques de f^2.

6. On veut vérifier que ce point critique est bien le maximum de la fonction f^2. Fixer y ($0 \le y \le 1$) et déterminer le maximum, $m(y)$, de la fonction $x \mapsto f^2(x,y)$. Déterminer la valeur maximale de la fonction m sur $[0,1]$. Conclure.

Exercice 3 - On considère toutes les boites qui sont des parallélépipèdes rectangles, de volume 1, sans couvercle. On cherche celles dont la surface des cloisons est minimale.

1. Exprimer la surface totale des cloisons en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p d'une telle boite, $S = f(\ell, p)$.

2. Montrer que f a un unique point critique (ℓ_0, p_0) et calculer la valeur de f en ce point.

3. On fixe $\ell > 0$. Étudier la fonction d'une variable $g(p) = f(\ell, p)$ et déterminer son minimum absolu en fonction de la valeur de ℓ, $m(\ell)$.

4. Étudier la fonction $m(\ell)$ et en déduire que $f(\ell_0, p_0)$ est le minimum absolu de f.

Exercice 4 - Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

1. Déterminer les points critiques de f et les valeurs de la fonction en ces points.

2. En considérant les droites $x = y$ et $x = -y$, montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

3. Déterminer le minimum global de f sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 3\}$.

4. Montrer qu'il s'agit en fait du minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercices complémentaires.

Exercice 5 - Déterminer les domaines de définition respectifs, $D_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, 3$), et les points critiques des fonctions:

$$f_1(x,y,z) = xyz + x + y - z\,, \quad f_2(x,y,z) = xy\ln(z) \;\text{ et }\; f_3(x,y,z) = x\ln(yz)\,.$$

Exercice 6 - Soit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

1. Déterminer et tracer les courbes de niveau de f pour les niveaux $z_0 = 0$, 4 et -3.

2. Déterminer et tracer l'intersection de $\mathcal{G}$ avec le plan d'équation $x = 0$.

3. Reprendre les questions **1.** et **2.** pour f définie par $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Exercice 7 - Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule $h(x,y) = f(x) + g(y)$. Montrer que si f est continue en x_0 et g en y_0, alors h est continue en (x_0, y_0). La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8 - On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.