Feuille d'exercices n°10 — Courbes paramétrées

Exercice 1 - La cycloïde est la courbe parcourue par un point sur le bord d'une roue qui roule sans glissement sur un sol plat. Le but de ce problème est d'étudier la cycloïde, ainsi qu'une de ses développantes.

Pour ce problème, la cycloïde sera donc la courbe paramétrée suivante :

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2, \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que la courbe γ est invariante par la translation $z \mapsto z + (2\pi, 0)$.

2. Montrer que la courbe γ admet une symétrie d'axe (Oy).

3. Étudier les variations des fonctions x et y sur $[-\pi, \pi]$.

4. Faire un développement limité à l'ordre 3 des fonctions x et y au voisinage de $t = \pi$.
(**Attention :** le développement limité est à faire en $t = \pi$!).

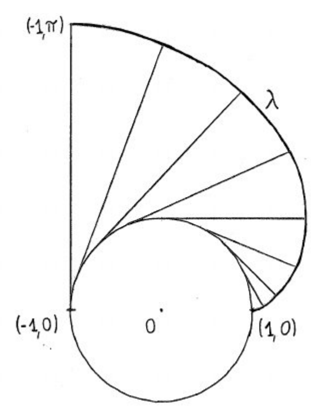
5. En déduire l'allure de la courbe γ au voisinage du point $\gamma(\pi)$.

6. Montrer que la vitesse instantanée de la courbe à l'instant t vaut $\|\gamma'(t)\| = 2\cos(\frac{t}{2})$. Calculer la longueur totale de la courbe entre les instants $-\pi$ et π.

7. Dessiner la courbe γ.

Pour tout réel t, on note $s(t) := \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du$ l'abscisse curviligne au temps t.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On fixe un point $\gamma(t_0)$ appartenant à la courbe, puis on attache une extrémité d'un fil tendu en $\gamma(t_0)$. Ensuite, on enroule progressivement le fil le long de la courbe. La trajectoire parcourue par l'extrémité libre du fil est ce que l'on appelle une *développante* de la courbe γ.



Par exemple, la développante du cercle unité attachée en $\gamma(t_0) = (-1, 0)$ et de longueur π est la courbe λ représentée sur le dessin à droite.

On admettra que l'une des développantes de la cycloïde, que l'on notera λ, a pour équation :

$$\lambda(t) = \gamma(t) - \frac{s(t)}{\|\gamma'(t)\|}\,\gamma'(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, \pi[.$$

8. On rappelle que $\tan(\frac{t}{2}) = \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 2 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } t \in [0, \pi[.$$

On définit λ sur $\mathbb{R}$ tout entier en utilisant la formule ci-dessus.

9. Pour tout réel t, exprimer $\lambda(t)$ à l'aide de $\gamma(t+\pi)$. En déduire que le support de λ est l'image du support de γ par une similitude que l'on explicitera.

10. Dessiner la courbe λ.

Exercices complémentaires.

Exercice 2 - Soit Γ, l'image de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$.

1. Étudier les fonctions coordonnées x et y.

2. Déterminer les symétries puis tracer Γ.

3. Déterminer la distance parcourue entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 - On veut représenter Γ, l'image de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \cos t\,, \text{ et } y(t) = \sin^3 t\,.$$

1. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de γ à $[-\pi, \pi]$, puis que Γ admet un axe de symétrie permettant de réduire l'étude à $[0, \pi]$.

2. Faire le tableau de variations associé à γ sur $[0, \pi]$.

3. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en $t_0 = 0$ des fonctions x et y. On appelle respectivement X et Y les parties principales de ces DL. Donner l'allure de la courbe paramétrée $(X(s), Y(s))$ quand s est proche de 0.

5. Même question en remplaçant t_0 par $t_1 = \pi$.

6. Montrer qu'il existe un unique $t_2 \in [0, \pi]$ tel que $x(t_2) = 0$. Montrer que $\cos t_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. En déduire que $\sin t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

7. Représenter Γ grâce aux questions précédentes. (On admettra qu'elle a même allure au voisinage des points $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$ que les esquisses des questions **4.** et **5.** ci-dessus et on prendra comme valeurs approchées $0,65$ pour $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ et $0,8$ pour $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3$.)

8. Exprimer la vitesse instantannée à l'instant t. En déduire que la longueur de la courbe entre les instants 0 et π peut s'écrire $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1+2u)^2 + 9u^2(1-u^2)}\,du$.