CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES – SECONDE SESSION

Jeudi 10 mars 2016 – Durée : 2h00.
Documents, calculatrices, téléphones, etc. interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

(b) En utilisant le TVI, montrer que $\frac{\sqrt{17}}{17}$ admet au moins deux antécédents par la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

(2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et g la fonction définie par la formule $g(x) = \int_3^x f(t)\,dt$.

(a) Quel est le domaine de définition naturel de g ? Que vaut $g'(x)$?

(b) Exprimer la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_3^{\cos(x)} f(t)\,dt$ en fonction de f.

Exercice 2. (8 points)

(1) Calculer, quand elles existent, les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sin x}+\sin(e^x)}{1+x^2}$.

(2) On considère la similitude directe qui envoie les points $A = (1, 1)$ et $B = (2, -1)$ respectivement sur les points $A' = (4, 1)$ et $B' = (3, -2)$.

(a) Écrire la similitude sous la forme $z \mapsto az + b$.

(b) Quels en sont les angle, rapport et centre (s'il existe) ?

(3) On considère l'équation différentielle (E), $y'' + 2y' - 3y = e^{-2t}$, sur $\mathbb{R}$.

(a) Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.

(b) Donner toutes les solutions de (E).

(c) Donner la (ou les) solution(s) satisfaisant: $y(0) = 0$ et $y'(0) = -3$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

(1) Montrer que pour tout $k > 0$, z^k est obtenu de z^{k-1} par une rotation que l'on spécifiera. Quelle est l'image de z^4 par cette rotation ?

(2) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

(3) En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de $4x^2 + 2x - 1 = 0$. (*Indication.* On pourra exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2(a)$.)

(4) En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 4. (6 points)

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ et la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-x^2} f(x) = e^{-x^2} \big(\int_0^x e^{t^2} dt \big)$.

(1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer la formule donnant sa dérivée, f'.

(2) Donner le développement limité de f en $x_0 = 0$, à l'ordre 5.

(3) Montrer que f est impaire. La fonction g est-elle impaire ? (Justifier.)

(4) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer g'.

(5) En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont g est une solution.