Correction du contrôle de Mathématiques de seconde session
du jeudi 10 mars 2016 – Durée : 2h.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) (a) cf. cours.

(b) La fonction sinus est continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et vaut 0 et 1, respectivement en 0 et $\frac{\pi}{2}$. Comme $17 > 1$, $\frac{\sqrt{17}}{17} \in [0, 1]$ et par le TVI, $\frac{\sqrt{17}}{17}$ admet donc (au moins) un antécédent dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. De même sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. De plus ces deux antécédents sont nécessairement différents puisque $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq \frac{\sqrt{17}}{17}$.

(2) (a) Comme f est continue, g est naturellement définie, et C^1, sur $\mathbb{R}^+$ et elle y est C^1. Sa dérivée est f.

(b) La fonction $x \mapsto \int_3^{\cos(x)} f(t)\, dt$ s'écrit $x \mapsto g(\cos(x))$. Comme la fonction cosinus est C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle y est en fait C^∞ !), la composée est dérivable et sa dérivée en x s'écrit: $(g \circ \cos)'(x) = \cos'(x) \cdot g'(\cos(x)) = -\sin(x) \cdot f(\cos x)$.

Exercice 2. (8 points)

(1) (a) Comme, par définition, $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$, on a $\frac{\tan(5x)}{x} = \frac{\sin(5x)}{x\cos(5x)} = 5\,\frac{1}{\cos(5x)}\frac{\sin(5x)}{5x}$.

Comme $\cos 0 = 1$ et que la limite quand y tend vers 0 de $\frac{\sin y}{y}$ existe et vaut 1, la limite désirée est 5 par composition et produit de limites.

(b) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\sin(y)| \leq 1$:

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \frac{|\sin(e^x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{\sin(e^x)}{1+x^2}$ converge donc vers 0 quand x tend vers l'infini par le théorème des gendarmes,
- par croissance (et positivité) de l'exponentielle, $0 < e^{\sin x} \leq e^1$ et donc comme ci-dessus, $\frac{e^{\sin x}}{1+x^2}$ converge vers 0 quand x tend vers l'infini.

La limite demandée existe donc bien et vaut 0 (comme somme de limites).

(2) On dénote par z_M l'affixe du point M.

(a) On sait que $a \cdot z_A + b = z_{A'}$ et $a \cdot z_B + b = z_{B'}$ donc $z_{A'} - z_{B'} = a(z_A - z_B)$ i.e $(4+i) - (3-2i) = a((1+i) - (2-i))$. Il vient $(1 + 3i) = a(-1 + 2i)$ i.e $a = \frac{1+3i}{-1+2i} = \frac{(1+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = 1 - i$.

On en déduit b par $a \cdot z_A + b = z_{A'}$ i.e $(1 - i)(1 + i) + b = 4 + i$ soit $b = 4 + i - 2 = 2 + i$. La similitude s'écrit donc $z \mapsto (1 - i)z + (2 + i)$.

(b) L'angle de la similitude est l'argument de $a = 1 - i$ et vaut donc $-\frac{\pi}{4}$ et son rapport est le module de a, soit ici $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Son centre existe puisque $a \neq 1$ et a pour affixe $z_c = \frac{b}{1-a} = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$. Le centre C a pour coordonnées cartésiennes $(1, -2)$.

(3) (a) L'équation homogène associée est l'équation $y'' + 2y' - 3y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $r^2+2r-3 = 0$ (dont l'inconnue est r). Le discriminant de $P(r) = r^2+2r-3$ est $2^2 - 4(-3) = 16 = 4^2 > 0$ et l'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles distinctes: $\frac{-2\pm 4}{2}$ i.e -3 et 1.

On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est $y(t) = ae^{-3t} + be^t$ où a et $b \in \mathbb{R}$.

(b) Comme -2 n'est pas solution de l'équation caractéristique, le théorème nous dit que (E) admet une solution de la forme $Q(t)e^{-2t}$ où $Q(t) = q$ est un polynôme de degré 0. On introduit $y(t) = qe^{-2t}$ dans (E) et on en déduit que $e^{-2t} = 4qe^{-2t} + 2(-2)qe^{-2t} - 3qe^{-2t} = -3qe^{-2t}$ et donc que $q = -\frac{1}{3}$.

Le principe de superposition nous donne alors que les solutions de (E) sont les fonctions $y(t) = ae^{-3t} + be^t - \frac{e^{-2t}}{3}$ où a et $b \in \mathbb{R}$.

(c) On écrit un telle solution comme ci-dessus et les réels a et b doivent alors vérifier: $y(0) = a + b - \frac{1}{3} = 0$ et $y'(0) = -3a + b + \frac{2}{3} = -3$. On en déduit que $a = 1$ et $b = -\frac{2}{3}$. La solution cherchée est donc unique (ce qui ne nous surprend pas si l'on se souvient des passages *culture* du cours) et vaut $y(t) = e^{-3t} - \frac{2e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{3}$.

Exercice 3. (5 points)

(1) Pour tout $k > 0$, $z^k = z \cdot z^{k-1}$, c'est-à-dire que z^k est l'image de z^{k-1} par la similitude $u \mapsto z \cdot u$ qui est bien une rotation puisque son centre est 0 et son rapport est $|z| = 1$. Son angle est l'argument de z, i.e $\frac{2\pi}{5}$.

L'image de z^4 par cette rotation est bien évidemment $z \cdot z^4 = z^5 = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^5 = e^{2i\pi} = 1$.

(2) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ est la somme des 5 premiers termes de la suite géométrique de raison z et de premier terme 1. C'est donc $1 \cdot \frac{1-z^5}{1-z}$ qui vaut 0 puisque $z^5 = 1$.

(3) On prend la partie réelle de la relation ci-dessus et on obtient $\mathrm{Re}(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$ i.e $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$ car la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles et que $\mathrm{Re}(z^k) = \mathrm{Re}(e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = \cos\frac{2k\pi}{5}$.

Comme $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x)$ car cosinus est 2π–périodique et paire,

- $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \cos\frac{2\pi}{5}$,
- et $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos(2\pi - \frac{4\pi}{5}) = \cos\frac{4\pi}{5}$.

On obtient donc $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$. Et comme $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, on obtient que $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos(2\,\frac{2\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$. Si l'on appelle $x = \cos\frac{2\pi}{5}$, on trouve que $1+2x+2(2x^2-1) = 0$ soit $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

(4) Le discriminant associé à l'équation ci-dessus est $2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 20 > 0$, et l'équation admet donc deux racines réelles disctinctes: $\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2\cdot 4} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$. De plus $\sqrt{5} \geq 2$, donc $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ est positive, tandis que l'autre solution est évidemment négative. On en déduit donc que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 4. (6 points)

(1) Comme la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue (en fait de classe C^∞ !) par opérations et compositions de fonctions continues, f qui en est une primitive est elle-même C^1 (en fait de classe C^∞ elle aussi). Sa dérivée est, par définition d'une primitive, $f'(x) = e^{x^2}$.

(2) Il suffit d'obtenir le développement limité de f' à l'ordre 4 et donc celui de l'exponentielle à l'ordre 2. En effet, en 0, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\varepsilon(y)$ avec $\varepsilon(y) \to 0$ quand $y \to 0$.

Donc par composition, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Et donc finalement, $f(x) = f(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Comme $f(0) = 0$, le DL en 0 de f à l'ordre 5 est $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\varepsilon(x)$.

(3) f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \geq 0$, $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = \int_0^x e^{(-u)^2}(-du)$ par changement de variable C^1 bijectif, $u = -t$. On obtient donc bien $f(-x) = -\int_0^x e^{u^2} du = -f(x)$ et f est donc bien impaire.

La fonction g est également impaire puisque son domaine de définition ($\mathbb{R}$) est symétrique par rapport à 0 et que $g(-x) = e^{-(-x)^2} f(-x) = e^{-x^2}(-f(x)) = -e^{-x^2} f(x) = -g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (On aurait pu aussi conclure en prouvant que $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction paire et que le produit d'une fonction paire avec une fonction impaire est impaire.)

(4) La fonction g est C^1 (et même C^∞) par opérations usuelles, puisque f est C^1, de dérivée :

$$g'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot f(x) + e^{-x^2} f'(x) = -2x\, e^{-x^2} f(x) + e^{-x^2} e^{x^2} = -2x\, g(x) + 1\,.$$

(5) La fonction g est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' + 2x\, y = 1$.