Contrôle continu de Mathématiques n°3

du lundi 4 janvier 2016 – Durée : 2h.

Documents, téléphones portables, tablettes et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barême est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1. Questions de cours (4 points)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition d'injectivité de la fonction f.

(2) Soient $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée C^1 (avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$) et $t_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) Donner la définition de la vitesse instantanée de γ au point $\gamma(t_0)$.
- (b) Quelle est la distance parcourue par la courbe γ entre les instants t et t_0 ?

(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$. Calculer les dérivées partielles de f (par rapport à x et y) au point $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (4 points) (*Les questions* (1), (2) *et* (3) *sont indépendantes.*)

(1)
- (a) Déterminer la similitude directe, $z \mapsto az + b$, qui est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre 0.
- (b) Supposons que cette similitude directe envoie le point $A = (x, y)$ (dont l'affixe est donc $z_A = x + iy$) sur le point $B = (u, v)$ (d'affixe $z_B = u + iv$). Exprimer u et v en fonction de x et y.

(2) Quelles sont les 4 racines quatrièmes complexes de 1 ? Les exprimer sous formes polaire et cartésienne.

(3) Quelle est la forme polaire de $-2 + i$?

Exercice 3. (6 points) (*Les questions* (1), (2) *et* (3) *sont indépendantes.*)

(1) On considère l'équation différentielle suivante, posée sur $\mathbb{R}$:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^t \qquad (E_1)$$

- (a) Spécifier l'équation homogène ainsi que l'équation caractéristique associées.
- (b) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).
- (c) Trouver une solution particulière de (E_1).
- (d) Quelles sont les solutions réelles y de (E_1) vérifiant $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

(2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + \cos(t)\, y(t) = -\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (11 points)

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto (x(t), y(t)) = (9\cos(t) + \cos(9t), 9\sin(t) + \sin(9t))\end{aligned}$$

(1) Montrer qu'il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(2) On étudie le comportement de γ près du point $\gamma(0)$.

  (a) Donner l'équation de la droite tangente à la courbe au point $\gamma(0)$.

  (b) Donner les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ en 0 à l'ordre 2.

  (c) Dessiner l'allure de la courbe par rapport à sa tangente près de $\gamma(0)$. (Justifier !)

(3) Calculer $\gamma(t + \frac{\pi}{4})$ et démontrer que la courbe est invariante par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre 0. (*Indication.* Faire un calcul direct ou utiliser la question (1) (b) de l'exercice 2.)

(4) En déduire qu'il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$.

(5) On reprend la question (2) au point $\gamma(\frac{\pi}{8})$. Soit $c = \cos(\frac{\pi}{8})$ et $s = \sin(\frac{\pi}{8})$.

  (a) Donner les signes de c et de s.

  (b) Exprimer $\cos(\frac{9\pi}{8})$ en fonction de c et $\sin(\frac{9\pi}{8})$ en fonction de s.

  (c) Montrer que le point $\gamma(\frac{\pi}{8})$ est singulier et donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $\gamma(\frac{\pi}{8})$.

  (d) En déduire les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ en $\frac{\pi}{8}$ à l'ordre 2. (*Indication.* Utiliser la formule de Taylor–Young.)

  (e) En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au point $\gamma(\frac{\pi}{8})$.

(6) Tracer la courbe.