Correction du Controle continu de Mathématiques n°3

du lundi 4 janvier 2016 – Durée : 2h.

Exercice 1. Questions de cours

(1) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective si pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

(2) (a) C'est la norme du vecteur vitesse en t_0, donc $||\gamma'(t_0)|| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$.

(b) La distance parcourue est $d(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} ||\gamma'(s)||ds$.

(3) La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 3x$. Donc, au point $(x, y) = (3, 1)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 9$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 11$.

Exercice 2. (1) (a) La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ est la similitude directe $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}} z = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)z$.

(b) D'après (a), $u+iv = z_B = (\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)z_A = (\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(x+iy) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y)+(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y)i$. Donc $u = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ et $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$.

(2) $z = re^{i\theta}$ est une racine quatrième complexe de 1 si $z^4 = 1 = e^{i(2\pi+2k\pi)}$. Donc $r = 1$ et $\theta = \frac{1}{4}(2\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Choisir $k = 0, 1, 2, 3$ donne 4 nombres complexes différents : sont : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, et $z_4 = e^{i2\pi} = 1$.
(*Attention*, $k = 4$ et $k = 0$ donnent le même nombre complexe...)

(3) Comme $|-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, on a $-2 + i = \sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i) = \sqrt{5}e^{i\arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})}$ (ou $\sqrt{5}e^{i(\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})}$, ou $\sqrt{5}e^{i(\pi+\arctan(-\frac{1}{2}))}$).
(*Rappel*, arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$, arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, arctan: $]-\infty, \infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.)

Exercice 3. (1) (a) L'équation homogène associée est : $y''-3y'+2y = 0$ et l'équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

(b) Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. On a donc comme solutions de l'équation homogène : $y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}$, avec C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Comme 1 est solution de l'équation caractéristique, on sait qu'il existe une solution particulière de la forme : $y_p = tQ(t)e^t$ où Q est un polynôme de degré celui de $t \mapsto t$, i.e de degré 1. On a donc $Q(t) = t(at + b) = at^2 + bt$ avec a, b deux nombres réels à déterminer.
En dérivant, il vient $y_p'(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t = (at^2 + (2a + b)t + b)e^t$ et de même $y_p''(t) = (at^2+(4a+b)t+2(a+b))e^t$. Donc pour que y_p satisfasse l'équation $y_p''-3y_p'+2y_p = te^t$, il faut que

$$(at^2 + (4a + b)t + 2(a + b))e^t - 3(at^2 + (2a + b)t + b)e^t + 2(at^2 + bt)e^t = te^t$$
$$\iff \qquad -2at + (2a - b) = t\,.$$

Donc $a = -1/2$ et $b = -1$, et $y_p(t) = -(\frac{1}{2}t + 1)te^t$ est solution particulière de (E_1).

(d) L'ensemble des solutions de (E_1) est $y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} - (\frac{1}{2}t+1)te^t$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Pour que l'on ait $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ et $y'(0) = C_1 + 2C_2 - 1 = 1$, il faut que $C_1 = -2$, $C_2 = 2$. Donc l'unique solution réelle vérifiant ces conditions est $y(t) = 2e^{2t} - (\frac{1}{2}t^2 + t + 2)e^t$.

(2) On peut par exemple utiliser la formule donnant les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 du type $y' = ay+b$ sur un intervalle I : $y(t) = e^{A(t)}\big(C+\int_\alpha^t e^{-A(s)}b(s)ds\big)$ avec A une primitive de a sur I et $\alpha \in I$. Ici, on obtient : $y(t) = e^{-\sin t}\big(C + \int_0^t e^{\sin s}(-\cos s)ds\big)$ (pour $\alpha = 0$). Et donc un calcul direct donne que les solutions sont les fonctions $y(t) = e^{-\sin t}(C - e^{\sin t}) = Ce^{-\sin t} - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (1) Comme les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques, et que $9(t+2\pi) = 9t + 18\pi$, on a pour tout t, $\gamma(t+2\pi) = \gamma(t)$ et il suffit donc de faire l'étude sur n'importe quel intervalle de longueur 2π.

(2) (a) La droite tangente est portée par le vecteur $\gamma'(0) = (0, 18)$ et passe par le point $\gamma(0) = (10, 0)$. C'est donc la droite d'équation $x = 10$.

(b) Comme les DL en 0 à l'ordre 2 de cosinus et sinus sont respectivement : $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ et $\sin(t) = t + t^2\varepsilon(t)$, on trouve $x(t) = 9(1 - \frac{t^2}{2}) + 1 - \frac{(9t)^2}{2} + t^2\epsilon(t) = 10 - 45t^2 + t^2\epsilon(t)$ et $y(t) = 9t + 9t + t^2\epsilon(t) = 18t + t^2\epsilon(t)$.

(c) Voir dessin ci-dessous.

(3) On a, $\gamma(t+\frac{\pi}{4}) = (9\cos(t+\frac{\pi}{4}) + \cos(9t+\frac{9\pi}{4}), 9\sin(t+\frac{\pi}{4}) + \sin(9t+\frac{9\pi}{4}))$. En utilisant les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, le fait que $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on trouve :

$$\Big(9\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - 9\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9t, 9\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + 9\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9t\Big)$$
$$= \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) - y(t)), \frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) + y(t))\Big).$$

Soit $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre 0. Par la question 2.(b) de l'exercice 2, $R_{\frac{\pi}{4}}(x, y) = \big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\big)$ et donc $R_{\frac{\pi}{4}}(\gamma(t)) = \gamma(t+\frac{\pi}{4})$. Autrement dit, l'image par la rotation $R_{\frac{\pi}{4}}$ du point paramétré par t_0 sur la courbe est le point de la courbe paramétré par $t_0 + \frac{\pi}{4}$. La courbe est invariante par $R_{\frac{\pi}{4}}$.

(4) Il suffit donc d'étudier la courbe sur n'importe quel intervalle de longueur $\frac{\pi}{4}$ (par exemple $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$) et de compléter par rotation.

(5) (a) $c > 0$, $s > 0$.

(b) $\cos(\frac{9\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{8} + \pi) = -\cos(\frac{\pi}{8}) = -c$. De même, $\sin(\frac{9\pi}{8}) = -s$.

(c) On en déduit que $\gamma'(\frac{\pi}{8}) = (-9\sin(\frac{\pi}{8}) - 9\sin(\frac{9\pi}{8}), 9\cos(\frac{\pi}{8}) + 9\cos(\frac{9\pi}{8})) = (0, 0)$. Donc $\frac{\pi}{8}$ est un point singulier. Un vecteur directeur de la tangente peut s'obtenir en dérivant de nouveau γ au point $\frac{\pi}{8}$ car $\gamma''(\frac{\pi}{8}) = (-9c - 81(-c), -9s - 81(-s)) = (72c, 72s) \neq (0, 0)$.

(d) Par la formule de Taylor–Young et par (b) et (c), $x(t) = x(\frac{\pi}{8}) + x'(\frac{\pi}{8})(t - \frac{\pi}{8}) + x''(\frac{\pi}{8})\frac{(t-\frac{\pi}{8})^2}{2} + (t - \frac{\pi}{8})^2\epsilon(t - \frac{\pi}{8}) = 8c + 36c(t - \frac{\pi}{8})^2 + (t - \frac{\pi}{8})^2\epsilon(t - \frac{\pi}{8})$.
De même, $y(t) = 8s + 36s(t - \frac{\pi}{8})^2 + (t - \frac{\pi}{8})^2\epsilon(t - \frac{\pi}{8})$.

(e) Voir dessin.

(6)