Contrôle continu de Mathématiques n°2

du mercredi 25 novembre 2015 – Durée : 2h.

Documents, téléphones portables, tablettes et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barême est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1. Questions de cours (5,5 points)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- (a) Étant donnés deux réels a et b, exprimer $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide d'une primitive, F, de f.
- (b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{\sin x} f(t)\,dt$.

(2) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + by = f$, où b et f sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

- (a) Comment s'appelle une telle équation ? Qu'est-ce que l'équation homogène associée à (E) ?
- (b) Soit B une primitive de b sur I. Vérifier que $t \mapsto e^{-B(t)}$ est une solution de l'équation homogène.
- (c) Soit $t_0 \in I$. Montrer que $t \mapsto e^{-B(t)} \int_{t_0}^t e^{B(s)} f(s)\,ds$ est solution de (E). Donner l'expression générale des solutions de (E).

Exercice 2. (8 points)

(1)
- (a) Montrer par un changement de variable que : $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta$.
  (*Rappel* : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.)
- (b) Calculer la somme $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$.
- (c) En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$.

(2)
- (a) Quelle est, sur $]-1,1[$, la dérivée de la fonction arcsin ? Quelle est celle de la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$?
- (b) En déduire la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}\big(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\big)$ sur $]-1,1[$.
- (c) Pour $x \in]0,1[$, écrire $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ à l'aide de g, puis donner la limite de $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(3) Montrer par un changement de variable que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$.

(4) Finalement, à l'aide d'une intégration par parties, calculer la primitive de arcsin sur $[-1,1]$ s'annulant en 0.

Exercice 3. (5,5 points)
Soient $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et a et ℓ deux nombres réels tels que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} xf'(x) = \ell.$$

On veut démontrer que : $\ell = 0$.

(1) On suppose $\ell > 0$. Démontrer l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\delta[$, $xf'(x) \geq \frac{\ell}{2}$.

(2) On fixe $x \in \left]0, \frac{\delta}{2}\right]$. Montrer qu'il existe $c \in [x, 2x]$ tel que $f(2x) - f(x) = xf'(c)$.
(*Indication :* appliquer le théorème des accroissements finis.)

(3) En utilisant que $\frac{2x}{c} \geq 1$, montrer que $xf'(c) \geq \frac{\ell}{4}$.

(4) En déduire une contradiction avec l'hypothèse $\ell > 0$.
(*Indication :* considérer la limite $x \to 0^+$ de $f(2x) - f(x)$.)

(5) On suppose maintenant $\ell < 0$. En considérant la fonction $x \mapsto -f(x)$ et en utilisant ce qui a été fait avant, obtenir une contradiction. Et conclure.

Exercice 4. (4 points)
On souhaite préciser le comportement de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ au voisinage de $+\infty$.

(1) Montrer que pour tout $y \geq 0$, $e^y \geq 1 + y$.

(2) Déduire de la question précédente que pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

(3) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq \arctan x$.

(4) Trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq M$ puis montrer que F est croissante.

*** Questions non notées, à faire à la maison. ***

Exercice 4 (suite). La question (4) ci-dessus implique que $F(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$ et on peut démontrer $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On se contente dans ce qui suit d'évaluer l'ordre de grandeur de $\ell - F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

(5) Justifier qu'à $x \geq 0$ fixé, $\ell - F(x) = \lim_{y\to+\infty} \int_x^y e^{-t^2}\, dt$.

(6) Toujours à x fixé, $x \geq 1$ cette fois, montrer que à l'aide d'une intégration par parties que $\int_x^y e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \frac{1}{2y}e^{-y^2} - \frac{1}{2}\int_x^y t^{-2}e^{-t^2}\, dt$ pour tout $y \geq x$.

(7) En déduire l'inégalité, pour tous $y \geq x \geq 1$, $\frac{1}{2x}e^{-x^2} - \frac{1}{2y}e^{-y^2} - \frac{1}{2x^2}\int_x^y e^{-t^2}\, dt \leq \int_x^y e^{-t^2}\, dt \leq \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \frac{1}{2y}e^{-y^2}$, puis, pour tout $x \geq 1$,

$$(*) \qquad \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^{-1} \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leq \ell - F(x) \leq \frac{1}{2x}e^{-x^2}.$$

(8) Conclure que : $F(x) = \ell - \frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{x}e^{-x^2}\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.