Correction du contrôle continu de Mathématiques n°2
du mercredi 25 novembre 2015 – Durée : 2h.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) (a) On a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

(b) D'après (a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{x_0}^{\sin x} f(t)\,dt = F(\sin x) - F(x_0)$; autrement dit, la fonction se réécrit $F \circ \sin - F(x_0)$. Or F est dérivable en tant que primitive de la fonction continue f, et sin l'est également ; par conséquent, $\big(F \circ \sin - F(x_0)\big) : x \mapsto \int_{x_0}^{\sin x} f(t)\,dt$ est dérivable.

(2) (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont l'équation homogène associée est : $y' + by = 0$.

(b) Soit $y : t \mapsto e^{-B(t)}$ sur I. Alors y est dérivable, et $y'(t) = -B'(t)e^{-B(t)} = -b(t)y(t)$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire : $y'(t) + b(t)y(t) = 0$ pour tout $t \in I$; on a donc bien une solution de l'équation homogène associée à (E).

(c) Posons cette fois $y : t \mapsto e^{-B(t)} \int_{t_0}^{t} e^{B(s)} f(s)\,ds$ sur I. Alors y est dérivable, et $y'(t) = -b(t)e^{-B(t)} \int_{t_0}^{t} e^{B(s)} f(s)\,ds + e^{-B(t)} e^{B(t)} f(t) = -b(t)y(t) + f(t)$ pour tout $t \in I$. En d'autres termes, on a $y' + by = f$ sur I : y est une solution de (E). On obtient la forme générale de telles solutions en ajoutant à cette solution particulière les multiples d'une solution non triviale de l'équation homogène associée : ce sont donc les $t \mapsto e^{-B(t)}\Big(c + \int_{t_0}^{t} e^{B(s)} f(s)\,ds\Big)$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (8 points)

(1) (a) On effectue le changement de variable C^1, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, dans l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$. La borne $\theta = 0$ devient $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et vice-versa ; $d\theta$ devient $-d\varphi$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/2}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(-d\varphi) = \int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi$, et cette dernière intégrale peut encore se réécrire $\int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$ (la variable d'intégration est muette), ou encore $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta$ d'après l'indication.

(b) Par linéarité de l'intégrale et comme $\sin^2 + \cos^2 = 1$, $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 1\,d\theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) D'après la question (1-a), $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$, tandis que d'après la question (1-b), $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où : $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

(2) (a) Sur $]-1,1[$, la dérivée d'arcsin est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Celle de $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ est $x \mapsto 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$, soit, tous calculs faits, $x \mapsto \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) Par linéarité de la dérivation, $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, c'est-à-dire $g'(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

(c) Puisque sur $]-1,1[$ (au moins), g est une primitive de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$, et que $g(0) = 0$, on a $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = g(x) - g(0) = g(x)$ pour tout $x \in]0,1[$. De plus, comme arcsin est continue et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + 0 = \frac{\pi}{4}$, et par suite, $\lim_{x\to 0^-} \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

(3) On effectue le changement de variable C^1, $t = \sin\theta$, qui est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$; ainsi $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$, car $1-\sin^2 = \cos^2$, et $\sqrt{\cos^2} = |\cos| = \cos$ puisque la fonction cosinus est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) Soit F cette primitive ; alors pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \int_0^x \arcsin t\,dt = \int_0^x 1\cdot\arcsin t\,dt$. Par intégration par parties (avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin(t)$), on obtient que $F(x) = [t\arcsin t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Or $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ admet $-\sqrt{1-t^2}$ pour primitive sur $]-1,1[$, d'où $F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$ pour tout $x \in]-1,1[$, et même sur $[-1,1]$ par continuité.

Exercice 3. (6 points)

(1) Comme f' est continue sur $]0,1]$ puisque f y est C^1, $x \mapsto xf'(x)$ est continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.

(2) C'est la définition de la limite en 0^+, avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$.

(3) Appliquons comme indiqué le théorème des accroissements finis à f qui est continue sur $[x,2x]$ et dérivable sur $]x,2x[$: on obtient $c \in]x,2x[$ (en particulier, $c \in [x,2x]$) tel que $\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} = f'(c)$, soit exactement $f(2x) - f(x) = xf'(c)$.

(4) Comme $2x \geq c > 0$ ($c \geq x > 0$), on a bien $\frac{2x}{c} \geq 1$. Or $xf'(c) = \frac{1}{2}\frac{2x}{c}cf'(c)$, et $cf'(c) \geq \frac{\ell}{2}$ par la question (1), car $0 < c \leq 2x \leq \delta$; par conséquent, $xf'(c) \leq \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}$.

(5) En revenant à la question (3), on a donc $f(2x) - f(x) \geq \frac{\ell}{4}$, et ce pour tout $x \in \left]0, \frac{\delta}{2}\right]$. On fait $x \to 0^+$ dans cette inégalité, ce qui donne $0 = a - a \geq \frac{\ell}{4}$, soit : $\ell \leq 0$, contradiction.

(6) On refait exactement la même chose avec $-f$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f à ceci près que a est remplacé par $-a$; si donc $\ell < 0$, alors $-\ell = \lim_{x\to 0^+} x(-f)'(x) > 0$, et le passage à la limite de (4) devient : $0 = -a - (-a) \geq \frac{-\ell}{4}$, soit : $\ell \leq 0$, nouvelle contradiction.
Par suite, ℓ ne saurait être ni strictement positif, ni strictement négatif, donc : $\ell = 0$.

Exercice 4. (4 points)

(1) On fait une étude de la fonction dérivable $y \mapsto e^y - 1 - y$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $y \mapsto e^y - 1$, positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $y \mapsto e^y - 1 - y$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc pour tout $y \geq 0$, $e^y - 1 - y \geq e^0 - 1 - 0 = 0$, *i.e.* $e^y \geq 1 + y$.

(2) Soit $t \geq 0$; on pose $y = t^2 \geq 0$ et la question (1) nous donne $e^{t^2} \geq 1 + t^2 > 0$, d'où, en passant à l'inverse, $e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

(3) Soit $x \geq 0$. On intègre l'inégalité de la question précédente entre 0 et x :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x.$$

(4) Comme $\arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $M = \frac{\pi}{2}$ (ou tout autre réel $\geq \frac{\pi}{2}$) convient, au regard de l'inégalité de la question précédente, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Pour voir que F est croissante, il suffit de remarquer qu'elle est dérivable et que sa dérivée sur $\mathbb{R}^+$, $t \mapsto e^{-t^2}$, est positive.

*** Questions non notées, à faire à la maison. ***

Exercice 4 (suite).

(5) À $x \geq 0$ fixé, on a par la relation de Chasles, pour tout $y \geq x$, $\int_x^y e^{-t^2}\,dt = \int_0^y e^{-t^2}\,dt - \int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(y) - F(x)$. En faisant $y \to +\infty$ dans cette égalité, puisque $\ell = \lim_{+\infty} F$, on a donc : $\lim_{y\to+\infty} \int_x^y e^{-t^2}\,dt = \lim_{y\to+\infty} \big(F(y) - F(x)\big) = \ell - F(x)$.

(6) À $x \geq 1$ fixé et pour tout $y \geq x$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_x^y e^{-t^2}\,dt &= \int_x^y \Big(-\frac{1}{2t}\Big)\Big(-2te^{-t^2}\Big)\,dt \\ &= \Big[\Big(-\frac{1}{2t}\Big)e^{-t^2}\Big]_x^y - \int_x^y \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \frac{1}{2y}e^{-y^2} - \frac{1}{2}\int_x^y t^{-2}e^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

(7) La première série d'inégalités découle de l'égalité de la question précédente, ainsi que de : $-\frac{1}{2x^2}\int_x^y e^{-t^2}\,dt = -\int_x^y \frac{1}{2x^2}e^{-t^2}\,dt \leq -\int_x^y \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,dt \leq 0$, la première inégalité venant de ce que $t \geq x$ sous l'intégrale, et la seconde, de la positivité de l'intégrande.

Pour la deuxième série d'inégalités, on fait $y \to +\infty$ dans la première série, ce qui donne :

$$\frac{1}{2x}e^{-x^2} - \frac{1}{2x^2}\big(\ell - F(x)\big) \leq \ell - F(x) \leq \frac{1}{2x}e^{-x^2}. \qquad (\star)$$

On garde alors l'inégalité de droite telle quelle, tandis que de l'inégalité de gauche on tire $\frac{1}{2x}e^{-x^2} \leq \big(1 + \frac{1}{2x^2}\big)\big(\ell - F(x)\big)$, d'où $\big(1 + \frac{1}{2x^2}\big)^{-1}\frac{2}{x}e^{-x^2} \leq \ell - F(x)$, et on a fini.

(8) Posons $\varepsilon(x) = -xe^{x^2}\big(\ell - F(x)\big) + \frac{1}{2}$, de sorte que l'égalité sur F et ε demandée soit vraie. Il reste à vérifier que $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$; or en multipliant par $(-xe^{x^2})$ et en ajoutant $\frac{1}{2}$, la série d'inégalités $(\star)$ de la question (7) devient :

$$-xe^{x^2}\frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{2} \leq -xe^{x^2}\big(\ell - F(x)\big) + \frac{1}{2} \leq -xe^{x^2}\Big(1 + \frac{1}{2x^2}\Big)^{-1}\frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire :

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2x^2}\Big)^{-1},$$

pour tout $x \geq 1$. En faisant tendre x vers $+\infty$, le membre de droite tend vers 0, ainsi donc que la fonction ε par le théorème des gendarmes, *cdfd*.