Contrôle continu de Mathématiques n^{o}1

du mercredi 7 octobre 2015 – Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 5 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. Questions de cours (3 points)

(1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (avec ε, ...).

(2) Rappeler la définition de fonction injective.

(3) Énoncer précisément le théorème de Weierstrass.

Exercice 2. (6 points) Déterminer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$.

(3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2+3}{(x+1)^3}$.

(4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x}{(\ln(x))^{2015}}$.

(5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(\frac{1}{2+\sin|x|})$.

Exercice 3. (6 points)
Dans cet exercice, on veut étudier la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

(1) Déterminer le domaine de définition naturel de f, noté D_f.

(2) Montrer que f est continue sur D_f.

(3) Montrer que f est injective sur D_f.

(4) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. En déduire l'image de f.

(5) La restriction de f à $]0, 1]$ est-elle majorée? minorée? Mêmes questions pour la restriction à $[1, +\infty[$.

Exercice 4. (5 points) Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) - f(x - y) = f(x)f(y).$$

(1) Montrer que $f(0) = 0$.

(2) En déduire que f est paire.

(3) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x-y) - f(x+y) = f(x)f(-y)$.

(4) Déduire des questions précédentes que f est constante.

(5) Conclure.

Exercice 5. (4 points) Dans cet exercice, on considère une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $x_1 \in]0;1[$ tel que $f(x_1) = \frac{1}{n+1}$.

(b) Montrer plus généralement que pour chaque entier i compris entre 1 et n, il existe $x_i \in]0;1[$ tel que $f(x_i) = \frac{i}{n+1}$.

(c) On définit $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. Montrer que $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1 = x_{n+1}$.

[FIN DU CONTRÔLE]

*** Question non notée, à faire à la maison. ***

Exercice 5 (suite).

(2) Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ croissante telle que $|g(x_i) - f(x_i)| \leq \frac{1}{n(n+1)}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$.

(a) Montrer que $g(x) \leq f(x) + \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [x_i; x_{i+1}]$.

(b) Montrer que $g(x) \geq f(x) - \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [x_i; x_{i+1}]$.

(c) En conclure que $|g(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0;1]$.

(3) Soit $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(1) = 1$ et $h(x) = 0$ si $x < 1$.

(a) Pour $x \in]0;1[$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $|x^k - h(x)| \leq \frac{1}{n}$?

(b) Existe-t-il $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x^k - h(x)| \leq \frac{1}{n}$ soit vérifié pour tout $x \in [0;1]$.

(c) Est-ce contradictoire avec ce qui a été fait précédemment ?