Correction du contrôle continu de Mathématiques n°1
du mercredi 07 octobre 2015 – Durée : 2h.

Exercice 1. (3 points)

(1) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < -M.$

(2) Une fonction $f : I \to J$ est dite injective si tout élément de J admet au plus un antécédent dans I par f. Avec les quantificateurs, $f : I \to J$ est injective s'écrit:

$$\forall x, x' \in I,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

(3) Théorème de Weierstrass : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, alors f admet un minimum et un maximum sur $[a, b]$.

Exercice 2. (6 points)

(1) On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}\,.$$

Or $\lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$ et $\lim_{x\to 2}(x - 1) = 1 \neq 0$. Donc, par quotient de limites,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4\,.$$

(2) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{x}\frac{2x}{\sin(2x)}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on a par composition de limites $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$. Puis, par opérations sur les limites, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}$.

(3) Pour $x > 0$,

$$\frac{x^3 + x^2 + 3}{(x+1)^3} = \frac{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x})^3} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}}{(1 + \frac{1}{x})^3}\,.$$

Or on sait que $\lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} = 1$ et $\lim_{x\to +\infty}(1 + \frac{1}{x})^3 = 1$. Par quotient de limites,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 3}{(x+1)^3} = 1\,.$$

(4) Pour $x > 1$,

$$\frac{x^2 - x}{(\ln(x))^{2015}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{(\ln(x))^{2015}}.$$

Or on sait que $\lim_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{(\ln(x))^{2015}} = +\infty$, par croissances comparées. Par produit de limites,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x}{(\ln(x))^{2015}} = +\infty\,.$$

(5) Par définition de la fonction sinus, pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin|x| \leq 1$ et donc
$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin|x|} \leq 1\,.$$
Comme la fonction ln est croissante et que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est positif,
$$\frac{-\ln(3)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(\frac{1}{2+\sin|x|}) \leq 0\,.$$
Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln(3)}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(\frac{1}{2+\sin|x|}) = 0$.

Exercice 3. (6.5 points)

(1) Comme la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est bien définie sur l'ensemble des réels x tels que $1-e^{-x} > 0$. Or cette condition est équivalente à $e^{-x} < 1$ ou encore à $-x < \ln(1) = 0$ et donc à $x > 0$. Le domaine de définition naturel de f est donc $D_f = \mathbb{R}^{+*}$.

(2) La fonction $x \mapsto 1-e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$; ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition, f est continue sur $D_f = \mathbb{R}^{+*}$.

(3) Soient x et $x' \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $f(x) = f(x')$. En composant par l'exponentielle, on trouve que $1-e^{-x} = 1-e^{-x'}$, puis $e^{-x} = e^{-x'}$ et enfin $x = x'$, en composant par $-\ln$. La fonction f est donc bien injective sur D_f.

(4) Comme $\lim_{x\to0^+} 1-e^{-x} = 0^+$ et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, par composition de limites, on a $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$ et que ln est continue en 1, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'après les questions précédentes, f est continue et injective sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc elle est strictement monotone (en fait strictement croissante) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et son image est
$$\mathrm{im}(f) = \left]\lim_{x\to0^+} f(x)\,,\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}^{-*}.$$

(5) D'après la question précédente, f est majorée (par 0) sur D_f donc en particulier sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$. Comme f est strictement croissante, elle est minorée sur $[1,+\infty[$ par $f(1)$. Par contre, puisque $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, f n'est pas minorée sur $]0,1]$.

Alternativement, on pouvait dire que f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, sa restriction aux intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ l'est également et donc:
$$f(]0,1]) = \left]\lim_{x\to0^+} f(x)\,,f(1)\right] =]-\infty\,,f(1)] \quad \text{et} \quad f([1,+\infty[) = \left[f(1)\,,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [f(1)\,,0]$$
ce qui (heureusement !) conduit à la même conclusion.

Exercice 4. (5 points)

(1) On choisit $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle qui donne alors $f(0+0)-f(0-0) = f(0)f(0)$, ce qui donne $f(0)^2 = 0$ et donc $f(0) = 0$.

(2) Le domaine de définition de la fonction est bien symétrique par rapport à 0 et il reste à montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(-y) = f(y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on choisit $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, et on a $f(0+y) - f(0-y) = f(0)f(y)$, ce qui donne $f(y) - f(-y) = 0$ (car $f(0) = 0$) puis $f(y) = f(-y)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, f est donc paire.

(3) Soient x et $y \in \mathbb{R}$, on applique l'équation fonctionnelle à x et $(-y)$, et on obtient: $f(x+(-y)) - f(x-(-y)) = f(x)f(-y)$, soit encore $f(x-y) - f(x+y) = f(x)f(-y)$, ce qui était demandé.

(4) Soient a et $b \in \mathbb{R}$, on pose $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$, de sorte que $x+y = a$ et $x-y = b$. En utilisant les deux questions précédentes, $f(a) - f(b) = f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y) = f(x)f(-y) = f(x-y) - f(x+y) = f(b) - f(a)$. On en déduit $f(a) - f(b) = 0$ et f est donc constante!

(5) La fonction f est constante et vaut 0 en 0, on a ainsi démontré que la seule fonction f qui satisfait l'équation fonctionnelle est la fonction nulle!

Exercice 5. (3.5 points)

(1) (a) La fonction f est continue sur $[0,1]$, et satisfait $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0 < \frac{1}{n+1} < 1$, il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $f(x_1) = \frac{1}{n+1}$.

(b) Comme pour tout entier i compris entre 1 et n, $0 < \frac{i}{n+1} < 1$, en appliquant de nouveau le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f, on obtient l'existence de $x_i \in]0,1[$ tel que $f(x_i) = \frac{i}{n+1}$.

(c) Il suffit de montrer que, pour tout $0 < i < n$, $x_i < x_{i+1}$. Supposons par l'absurde que pour un certain i on ait $x_i \geq x_{i+1}$. On aurait par croissance de f: $\frac{i}{n+1} = f(x_i) \geq f(x_{i+1}) = \frac{i+1}{n+1}$, ce qui est absurde!

[FIN DU CONTRÔLE]

*** Question non notée, à faire à la maison. ***

Exercice 5 (suite).

(2) (a) Soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$, alors en appliquant successivement la croissance de g, l'inégalité de l'hypothèse, le fait que $f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{1}{n+1}$ et la croissance de f, on a:

$$g(x) \leq g(x_{i+1}) \leq f(x_{i+1}) + \frac{1}{n(n+1)} = f(x_i) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \leq f(x) + \frac{1}{n}.$$

(b) De la même façon, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $g(x) \geq g(x_i) \geq f(x_i) - \frac{1}{n(n+1)} = f(x_{i+1}) - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \geq f(x) + \frac{1}{n}$.

(c) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier i tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On applique alors les deux questions précédentes et on a bien $|g(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

(3) (a) Pour $x \in]0,1[$, $h(x) = 0$, donc $|x^k - h(x)| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow x^k \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow k\ln(x) \leq \ln(\frac{1}{n}) \Leftrightarrow k \geq \frac{-\ln(n)}{\ln(x)}$.

(b) On raisonne par l'absurde: si un tel entier k existait, on aurait d'après la question précédente, $k \geq \frac{-\ln(n)}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0,1[$. Or $\lim_{x\to 1} \frac{-\ln(n)}{\ln(x)} = +\infty$, donc la fonction $x \mapsto \frac{-\ln(n)}{\ln(x)}$ n'est majorée par aucun entier k: on obtient une contradiction! Il ne peut exister un tel entier k.

(c) La fonction h n'étant pas continue en 1, ces observations ne contredisent pas les questions précédentes.