Test n°4 (décembre)

Calculatrices et documents interdits

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement votre réponse.*

1) La similitude donnée par $z \mapsto (2-2i)z+1$ a pour rapport $2\sqrt{2}$, pour angle $-\frac{\pi}{4}$ et pour centre le point d'affixe $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$.

2) La similitude du plan qui envoie respectivement les points de coordonnées $(1,-1)$ et $(1,1)$ sur les points de coordonnées $(2,0)$ et $(0,0)$ a pour centre le point de coordonnées $(0,1)$.

3) Soit $a \in \mathbb{C}^*$, la réciproque de la similitude $z \mapsto az+b$ est la similitude $z \mapsto \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$.

4) La restriction de la fonction exponentielle, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, à $A = \{x+iy : x \in \mathbb{R},\ y \in]1, 1+2\pi]\} \subset \mathbb{C}$ est une bijection.

5) Soit $a : I \to \mathbb{C}$, une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si la fonction $z : I \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation (E): $z' = az$, alors $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont aussi des solutions de (E).

6) Soient a, b et c des réels et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\frac{3}{2}$. Soit Y une solution complexe de l'équation différentielle $aY''+bY'+cY = f$ telle que $Y(\frac{3}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. La fonction $y = \frac{Y+\overline{Y}}{2}$ est solution de l'équation différentielle $ay''+by'+cy = \mathrm{Re}(f)$ et satisfait $y(\frac{3}{2}) = 1$.

7) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y''+\pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = 0$ et $y(2) = 1$.

8) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y''+\pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = -1$ et $y(2) = -1$.

9) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y''+\pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = \frac{1}{2\pi^2}$ et $y'(\frac{1}{2}) = 0$.

10) Soient y et z des fonctions à valeurs réelles telles que $y(t) = tz(t)$ pour tout t de $I =]0, +\infty[$. Alors y satisfait $t^2y'' - ty' + y = 2t$ sur I si et seulement si z' satisfait $t^2u' + tu = 2$ sur I.

11) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Son support est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si pour tout réel t, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$.

12) Les trois courbes paramétrées suivantes ont même support :

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$
$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi],$$
$$\gamma_3(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

13) Le support de la courbe paramétrée $\gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\ln t, 3\ln(6t))$ est une droite de $\mathbb{R}^2$.

14) Le support de la courbe paramétrée $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par la formule $\gamma(t) = (|t|, t)$ est la droite d'équation $y = x$.

15) Soit r et θ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La distance parcourue le long de la courbe paramétrée $(r(t)\cos t, r(t)\sin t)$ entre les temps t_0 et t_1 (avec t_0 et $t_1 \in I$) est donnée par la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}\, dt\,.$$

16) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

17) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. La dérivée de f le long de γ à l'instant t est $4\, e^t \sin t$.

18) Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Si le produit scalaire du gradient de f au point $\gamma(t)$ et de $\gamma'(t)$ est strictement négatif (i.e $\vec{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) < 0$) pour tout $t \in [0, 1]$, alors $f(\gamma(0)) > f(\gamma(1))$.

19) La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $g(x, y) = x^2 y + x y^2$ admet comme unique point critique le point $(0, 0)$.

20) J'ai répondu “faux” à cette question.