Feuille d'exercices n°9 — Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - On définit les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,, \quad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,, \quad f_3(x,y) = \frac{-4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\,,$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$ et en posant $f_i(0,0) = 0$ pour tout i ($1 \leq i \leq 3$). Déterminer lesquelles sont continues en $(0,0)$ et lesquelles y sont différentiables.

Exercice 2 - On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{pour tout } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en ce point.

Exercice 3 - Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule $h(x,y) = f(x) + g(y)$.

1. Montrer que si f est continue en x_0 et g en y_0, alors h est continue en (x_0, y_0).

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 - La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } xy \neq 0$$

et par $f(x,y) = 0$ sinon est-elle continue ?

Exercice 5 - Écrire le développement de Taylor à l'ordre 1 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x,y) = \cos(\tan(x + \sin y))$.

Exercice 6 - Montrer que la courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ d'équation $x^3+y^3-3xy = 1$ est, localement autour du point $(0,1)$, d'équation $y = \varphi(x)$. Déterminer la dérivée de φ au voisinage de 0 ainsi que l'équation de la tangente à Γ en $(0,1)$.

Exercice 7 - On cherche les triangles de périmètre fixé dont la surface est maximale. On rappelle la formule de Héron d'Alexandrie donnant l'aire d'un triangle A en fonction de la longueur de ses côtés a, b et c et de son demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Pour simplifier le problème on s'intéresse aux triangles de périmètre 2.

1. Exprimer A en fonction de a et b, $A = f(a,b)$.

2. Représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction f.

3. Pourquoi les côtés d'un triangle de périmètre 2 sont-ils tous de longueur inférieure à 1 ?

4. Pourquoi chercher à maximiser A est-il équivalent à chercher à maximiser A^2 ?

5. Déterminer les points critiques de f^2.

6. On veut vérifier que ce point critique est bien le maximum de la fonction f^2. Fixer y ($0 \leq y \leq 1$) et déterminer le maximum, $m(y)$, de la fonction $x \mapsto f^2(x,y)$. Déterminer la valeur maximale de la fonction m sur $[0,1]$. Conclure.

Exercice 8 - Déterminer les points critiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ suivantes:

$$f_1(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\,, \quad f_2(x,y) = 3x^3 + xy^2 - xy\,,$$
$$f_3(x,y) = x^4 + \frac{y^3}{3} - 4y - 2\,, \quad f_4(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3\,.$$

Dans chaque cas, montrer que ces points critiques ne correspondent pas à des extrema globaux.

Exercice 9 - Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

1. Déterminer les points critiques de f et les valeurs de la fonction en ces points.

2. En considérant les droites $x = y$ et $x = -y$, montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

3. Déterminer le minimum global de f sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$.

4. Montrer qu'il s'agit en fait du minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 - Soit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

1. Déterminer et tracer les courbes de niveau de f pour les niveaux $z_0 = 0$, 4 et -3.

2. Déterminer et tracer l'intersection de $\mathcal{G}$ avec le plan d'équation $x = 0$.

3. Reprendre les questions **1.** et **2.** pour f définie par $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Exercice 11 - Déterminer les domaines de définition respectifs, $D_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, 3$), et les points critiques des fonctions:

$$f_1(x,y,z) = xyz + x + y - z\,, \quad f_2(x,y,z) = xy\ln(z) \;\text{ et }\; f_3(x,y,z) = x\ln(yz)\,.$$

Exercices complémentaires.

Exercice 12 - Reprendre l'**Exercice 1** avec les fonctions

$$f_1(x,y) = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad f_2(x,y) = \frac{x - \sin x}{x^2+y^2}\,, \quad f_3(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}\,.$$

Exercice 13 - On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. (Plus dur.) Le prolongement obtenu est-il différentiable ? Est-il de classe C^1 ?

Exercice 14 - On considère toutes les boites qui sont des parallélépipèdes rectangles, de volume 1, sans couvercle. On cherche celles dont la surface des cloisons est minimale.

1. Exprimer la surface totale des cloisons en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p d'une telle boite, $S = f(\ell, p)$.

2. Montrer que f a un unique point critique (ℓ_0, p_0) et calculer la valeur de f en ce point.

3. On fixe $\ell > 0$. Étudier la fonction d'une variable $g(p) = f(\ell, p)$ et déterminer son minimum absolu en fonction de la valeur de ℓ, $m(\ell)$.

4. Étudier la fonction $m(\ell)$ et en déduire que $f(\ell_0, p_0)$ est le minimum absolu de f.