Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Feuille d'exercices n°8 — Courbes paramétrées

Exercice 1 - 1. Donner un paramétrage $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ du cercle $\mathcal{C}$, de centre O et de rayon 1. Puis en donner un second.

2. Déterminer la similitude directe d'angle nul qui envoie $\mathcal{C}$ sur le cercle de centre $(-1, 2)$ et de rayon 3. En déduire un paramétrage de ce dernier.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en $\gamma(t)$. Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{O\gamma(t)}$.

Exercice 2 - On veut représenter Γ, l'image de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \cos t\,, \text{ et } y(t) = \sin^3 t\,.$$

1. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de γ à $[-\pi, \pi]$, puis que Γ admet un axe de symétrie permettant de réduire l'étude à $[0, \pi]$.

2. Faire le tableau de variations associé à γ sur $[0, \pi]$.

3. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en $t_0 = 0$ des fonctions x et y. On appelle respectivement X et Y les parties principales de ces DL. Donner l'allure de la courbe paramétrée $(X(s), Y(s))$ quand s est proche de 0.

5. Même question en remplaçant t_0 par $t_1 = \pi$.

6. Montrer qu'il existe un unique $t_2 \in [0, \pi]$ tel que $x(t_2) = 0$. Montrer que $\cos t_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. En déduire que $\sin t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

7. Représenter Γ grâce aux questions précédentes. (On admettra qu'elle a même allure au voisinage des points $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$ que les esquisses des questions **4.** et **5.** ci-dessus et on prendra comme valeurs approchées $0,65$ pour $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ et $0,8$ pour $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3$.)

8. Exprimer la vitesse instantannée à l'instant t. En déduire que la longueur de la courbe entre les instants 0 et π peut s'écrire $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1+2u)^2 + 9u^2(1-u^2)}\,du$.

Exercice 3 - Soit Γ, l'image de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$.

1. Étudier les fonctions coordonnées x et y.

2. Déterminer les symétries puis tracer Γ.

3. Déterminer la distance parcourue entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 - On cherche à représenter Γ, l'image de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) = e^{t\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos t + \sin t)\,, \text{ et } y(t) = e^{t\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin t - \cos t)\,.$$

1. Calculer et simplifier $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

2. Soit $r > 0$. Montrer que l'intersection entre Γ et le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r est réduite à un point $\gamma(t_r)$. Déterminer t_r en fonction de r.

3. Construire les tableaux de variations de x et y sur $[0, 2\pi]$.

4. Donner un vecteur directeur de la tangente à Γ en $\gamma(t)$ à l'instant $t = 0$. Faire de même aux instants $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

5. Construire la partie de Γ correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi]$, en y faisant apparaître les tangentes obtenues à la question précédente.

6. Comparer les fonctions $x(t)$ (resp. $y(t)$) et $x(t + 2\pi)$ (resp. $y(t + 2\pi)$). En déduire que $\gamma(t + 2\pi)$ est l'image de $\gamma(t)$ par une homothétie de centre $(0,0)$ dont on précisera le rapport. Donner une ébauche de la courbe Γ.

7. Déterminer (et simplifier) la vitesse $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. En déduire l'expression de la distance parcourue entre deux instants quelconques.