Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Feuille d'exercices n°7 — Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 - 1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points de coordonnées $(1,3)$ et $(-2,1)$. En donner la pente et un vecteur directeur. En donner tous les vecteurs directeurs unitaires.

2. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_2$, orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et passant par le point $(2,-4)$.

3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 2 - Soit trois points A, B et C de coordonnées respectives $(-1,1)$, $(1,-3)$ et $(6,-2)$. Trouver les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC (point de concours des hauteurs).

Exercice 3 - On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

1. Déterminer les coordonnées du point A tel que $\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

2. Déterminer le plan $\mathcal{P}$, orthogonal à $\vec{u}$ et passant par A.

3. Représenter graphiquement $\mathcal{P}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

4. On dénote X, Y et Z les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes Ox, Oy et Oz respectivement. Montrer que le triangle XYZ est équilatéral et que A en est l'isobarycentre (par exemple), défini comme l'unique point tel que $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{AZ}=0$.

Exercice 4 - On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où l'on se donne les points A, B, C de coordonnées respectives $(6,2,4)$, $(2,1,1)$ et $(\alpha,3,7)$. À quelle condition sur α:

1. $\overrightarrow{OC}$ est-il unitaire ?

2. a-t-on $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BO})\cdot\vec{k}=1$?

3. les points A, B et C sont-ils alignés ?

4. les droites (OA) et (AC) sont-elles orthogonales ?

Exercice 5 - On se place dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soit $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Déterminer $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{v}\wedge\vec{u}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$.

2. Soit $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$. Calculer $(\vec{i}\wedge\vec{u})\wedge\vec{j}$ et $\vec{i}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{j})$. En déduire qu'il faut faire attention ...

3. On se donne un vecteur unitaire $\vec{v}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$. Quelle condition satisfont α et β ? Déterminer le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{k}$.

Exercice 6 - Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$.

2. Montrer que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{w}\wedge\vec{u})\cdot\vec{v}=(\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u}$.

Exercice 7 - Produit vectoriel et figures géométriques.

1. Montrer que l'aire d'un parallélogramme ABCD est $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}|$.

2. Montrer que, dans un triangle, la quantité $\frac{|\sin(\text{angle})|}{\text{longueur du côté opposé}}$ est indépendante de l'angle choisi. (Indication: calculer $\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$, successivement pour $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.)