POLYTECH PARIS-SUD — ORSAY 2013–2014
PEIPA 1ÈRE ANNÉE, S1
MATHÉMATIQUES

Feuille d'exercices n°6 — Nombres complexes

Exercice 1 - Donner les formes cartésienne et polaire des nombres complexes suivants:

$$\text{(a) } 2+i\,,\ \text{(b) } \sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,,\ \text{(c) } \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2\,,\ \text{(d) } 2i(3+i\sqrt{7})\,,\ \text{(e) } (1+i)e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\ \text{(f) } \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}\,.$$

Exercice 2 - Donner module et argument des nombres complexes suivants:

$$\text{(a) } e^{3i}\,,\ \text{(b) } e^{-7+i}\,,\ \text{(c) } \left(3e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^2\,,\ \text{(d) } e^{i\theta}+e^{2i\theta}\,,\ \text{(e) } e^{e^{i\frac{\pi}{6}}}\,.$$

Exercice 3 - Dans les cas suivants, écrire sous la forme $z \mapsto az+b$, la similitude directe qui envoie les points A et B respectivement sur les points A' et B'. Puis préciser ses angle, rapport et centre (s'il existe). Finalement, donner les coordonnées cartésiennes de l'image du point C.

1. $A=(2,1)$, $B=(3,2)$, $A'=(6,-4)$, $B'=(9,-5)$, et $C=(1,3)$.

2. $A=(1,-1)$, $B=(-3,1)$, $A'=(0,2\sqrt{2})$, $B'=(2\sqrt{2},-4\sqrt{2})$, et $C=(1,2)$.

3. $A=(-3,3)$, $B=(4,3)$, $A'=(-3,-2)$, $B'=(-3,5)$, et $C=(1,1)$.

Exercice 4 - Dans chaque cas, écrire sous la forme $z \mapsto az+b$, la similitude directe de centre C, d'angle θ et de rapport λ.

1. $C=(1,1)$, $\theta=\frac{\pi}{6}$ et $\lambda=2$.

2. $C=(-2,1)$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$ et $\lambda=\frac{1}{2}$.

Exercice 5 - Soit z et z' deux nombres complexes distincts. Déterminer toutes les similitudes directes qui échangent z et z'. Quels en sont les angles, rapports et centres (s'ils existent) ?

Exercice 6 - 1. Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

2. Quelles sont les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$$\text{(a) } z^2+2z+4=0\,,\quad \text{(b) } z^2+6z+11=0\,,\quad \text{(c) } 2z^4+20z^2+50=0\,.$$

Exercice 8 - En utilisant les nombres complexes, exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 9 - Exprimer sous forme polaire les racines cubiques de $-12+12i\sqrt{3}$. Même question pour $-4\sqrt{2}(1+i)$.

Exercice 10 - 1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines sont de la forme 1, j et j^2 avec $j \in \mathbb{C}$.

2. En factorisant $z^3 - 1$, en déduire les racines de $1 + z + z^2$. Retrouver ce résultat par le calcul direct de $1 + j + j^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer de deux manières différentes que si $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ satisfait $z^n = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Exercice 11 - Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\frac{z+\bar{z}}{2}}$ et que $\left| e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} \right| = 1$.

Exercice 12 - On étend les fonctions sinus et cosinus à $\mathbb{C}$ en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,.$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions complexes de l'équation $\sin z = 0$ est $\{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos z = 0$?

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

3. Montrer que $\overline{(\sin z)} = \sin(\bar{z})$. En déduire que $\mathrm{Re}(\sin z) = \sin(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z))$.

4. Établir une formule similaire pour $\mathrm{Im}(\sin z)$. (Remarque: on peut évidemment établir des formules similaires pour les parties réelle et imaginaire de $\cos z$.)

5. Calculer la dérivée de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = \sin(t + 2it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 - On rappelle que les primitives d'une fonction continue, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sont les fonctions $t \mapsto \int^t \mathrm{Re}(\varphi(s))ds + i \cdot \int^t \mathrm{Im}(\varphi(s))ds$.

1. Donner toutes les solutions $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes:

$$\text{(a) } z' = \frac{1}{1+t^2}\,z\,, \quad \text{(b) } z' = (3t^2 + 2it^3)z\,, \quad \text{(c) } z' = te^{(1+i)t^2}\,z\,.$$

2. Donner toutes les solutions $z : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $z' = (\ln t + ie^t)\,z$, en spécifiant l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel elles sont définies.