POLYTECH PARIS-SUD — ORSAY 2013–2014
PEIPA 1ÈRE ANNÉE, S1
MATHÉMATIQUES

Feuille d'exercices n°5 — Équations différentielles

ED à variables séparables

Exercice 1 - Résolvez les équations différentielles d'ordre 1 suivantes en précisant sur quel(s) intervalle(s):

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } y'\sin t = y\cos t\,, & \text{(b) } y' - te^{-y} = 0\,, & \text{(c) } y^2 + (t+1)y' = 0\,, \\ \text{(d) } yy' = t\,, & \text{(e) } y' - ty^2 = t\,, & \text{(f) } yy' = 2t\sqrt{1-y^2}\,. \end{array}$$

Exercice 2 - On considère l'équation différentielle (E): $y = \ln(y')$.

1. Supposons que y soit une solution C^2 de cette équation et posons $u = y'$. Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par u.

2. Résoudre cette seconde équation (attention à l'intervalle de définition) et en déduire la forme générale de y.

3. Résoudre (E) "directement" en la transformant en une équation équivalente via l'exponentielle.

Exercice 3 - Résoudre en fonction de $k \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle: $ty' - ky = 0$.

Exercice 4 - On considère l'équation différentielle $ty' = t - y$ (qui est dite *homogène* car elle peut se mettre sous la forme $y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$ avec g continue).

1. On suppose que y en est solution et on pose $z = \frac{y}{t}$ sur un intervalle où y est définie et qui ne contient pas 0. Quelle équation différentielle (à variables séparables) d'ordre 1 la fonction z vérifie-t-elle ?

2. Résoudre cette équation et en déduire la forme générale de y.

3. De la même manière, résoudre: (a) $t - y + ty' = 0$, et (b) $ty^2y' = t^3 + y^3$.

ED linéaires d'ordre 1

Exercice 5 - 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants suivantes:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } y' + 2y = 0\,, & \text{(b) } y' - 5y = t\,, & \text{(c) } y' + 3y = e^{-2t}\,, \\ \text{(d) } y' - 2y = t^2e^{2t}\,, & \text{(e) } y' + y = \sin t + 3\sin 2t\,, & \text{(f) } y' - y = t^2e^t\,. \end{array}$$

2. Pour (b), donner la solution qui satisfait $y(0) = \frac{1}{5}$. De même pour (e), avec $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{5}$.

Exercice 6 - Résoudre sur I l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis trouver la solution vérifiant $y(t_0) = y_0$ dans les cas suivants:

1. $I = \mathbb{R}$: (a) $y' - ty = t^3$, avec $t_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = -3$ et (b) $y' + 2ty = e^{t-t^2}$, avec $t_0 = 1$, $y_0 = 1$.

2. $I =]0, +\infty[$: $y' + \frac{1}{t}y = 3\cos(2t)$, avec $t_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = 3$.

3. $I =]-1, 1[$: $(t^2 - 1)y' + (t+2)y = (t+1)^{\frac{3}{2}}$, avec $t_0 = 0$ et $y_0 = \frac{8}{3}$.

Exercice 7 - On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1:

$$y' - \frac{2}{1-t^2}\, y = 1\ . \tag{E}$$

1. Quelles sont les solutions de (E) sur les intervalles où $1-t^2$ ne s'annule pas ?

2. Quelles sont les fonctions continues qui satisfont (E) sur $\mathbb{R}$? (Attention, ce ne sont pas nécessairement des *solutions* de (E) sur $\mathbb{R}$ qui, elles, doivent être de classe C^1.)

Exercice 8 - Soit une équation différentielle linéaire d'ordre 1, (E): $y' - a(t)y = b(t)$ dont on dénote par (E_0) l'équation homogène associée: $y' - a(t)y = 0$.

1. Soit y_1 et y_2 des solutions de (E_0) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $y_1 + y_2$ et λy_1 sont solutions de (E_0).

2. Soit y_0 une solution de (E_0) et Y une solution de (E). Montrer que $Y + y_0$ est solution de (E).

3. Soit Y_1 et Y_2 des solutions de (E). Montrer que $Y_1 - Y_2$ est solution de (E_0). En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{Y_1 + y_0 \,|\, y_0 \text{ solution de } (\mathrm{E}_0)\}$.

Exercice 9 - Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue: $ty' - 2y = 0$.

1. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$?

2. Existe-t-il des fonctions continues qui vérifient (E) sur $\mathbb{R}$?

3. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$? Parmi elles, lesquelles vérifient $y(1) = 2$?

Exercice 10 - On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue:

$$(\sin t)\, y' - (\cos t)\, y = e^t \sin^4 t\ . \tag{E}$$

1. Quelles sont les solutions de (E) sur les intervalles où $\sin t$ ne s'annule pas ?

2. Quelles sont les fonctions continues qui vérifient (E) sur $]-\pi, \pi[$?

3. Existe-t-il une solution de (E) sur $]-\pi, \pi[$?

Exercices complémentaires.

Exercice 11 - On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue suivante:

$$(t^2 - 1)y' - 2ty = t^2 + 8t + 1\ . \tag{E}$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée (E_0): $(t^2-1)y' - 2ty = 0$, sur les intervalles où $t^2 - 1$ ne s'annule pas.

2. Quelles sont les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$?

3. Déterminer une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R}$. On appelle cette solution P.

4. Exprimer toutes les solutions de (E), en fonction de P.

Exercice 12 - L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue suivante admet-elle des solutions sur $]-\infty, 1[$: $2t(t-1)y' + (1-t)y = 1$?