Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Feuille d'exercices n°4 — Intégration

Exercice 1 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

(a) $x(x^3+1)$, (b) $\frac{1}{x-3}$, (c) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, (d) $\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$,
(e) $\sin^2(x)$, (f) $\cos^4(x)$, (g) $\tan^2(x)$, (h) $\frac{1}{(2x+5)^3}$.

Exercice 2 - Soit F, G des primitives respectives, sur un intervalle contenant 0, de f et g avec

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,, \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,.$$

Déterminer les expressions de $F+G$ et $F-G$. En déduire les expressions F et G.

Exercice 3 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes, grâce à une intégration par parties:

(a) $(x+1)e^{-x}$, (b) $\ln(x)$, (c) $(x^2+x+1)e^{2x}$, (d) $e^x\sin x$, (e) $x\arctan x$,
(f) $\ln^2(x)$, (g) $e^{-2x}\cos^2 x$, (h) $\sqrt{x}\ln x$, (i) $e^x\cos^2(x)$, (j) $\sin(\ln x)$.

Exercice 4 - Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties:

$$\text{(a)} \int_0^1 t^2 e^t\,dt\,, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(1+\cos t)\,dt\,, \qquad \text{(c)} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt\,.$$

Exercice 5 - En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_1^e \cos(\pi \ln x)\,dx\,, \qquad J = \int_1^e \sin(\pi\ln x)\,dx\,.$$

Exercice 6 - Déterminer une primitive de $x \mapsto xe^x$. En déduire les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^\pi xe^x \sin(2x)\,dx\,, \qquad J = \int_0^\pi xe^x\cos(2x)\,dx\,.$$

Exercice 7 - Calculer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable si nécessaire:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}\,, \qquad \text{(b)} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \text{(c)} \int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx\,, \qquad \text{(d)} \int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

Exercice 8 - Soit f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction F par la formule $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$.

1. Écrire cette formule en fonction de f, g et H une primitive de h.

2. Montrer que F est de classe C^1.

3. Supposons que f soit C^m, que g soit C^n et h soit C^p. Que peut-on dire de la fonction F ?

Exercice 9 - Soit $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{3+\sin^2 x}\, dx$. Effectuer le changement de variable $t = \pi - x$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 10 - Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Exercice 11 - On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.

Exercice 12 - Calculer une primitive de la fonction définie par $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 13 - Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$f(x) = x(\ln x)^2\,, \qquad g(x) = e^{2x}\sin(3x)\,, \qquad h(x) = e^{\cos(x)}\sin(2x)\,.$$

Exercice 14 - Décomposer les fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive:

$$\text{(a)}\ \frac{2x+3}{x^2-4}\,, \qquad \text{(b)}\ \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,, \qquad \text{(c)}\ \frac{x^2+1}{x^2-1}\,,$$
$$\text{(d)}\ \frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x}\,, \qquad \text{(e)}\ \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,, \qquad \text{(f)}\ \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}\,.$$

Exercice 15 - Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$. En utilisant un changement de variable adéquat, en déduire la valeur de l'intégrale: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan t}$.

Exercice 16 - On note $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n\, dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

2. En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.

3. Finalement, déduire de la question précédente la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ (où le coefficient $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ apparaît dans le binôme de Newton).

Exercice 17 - On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Que valent F_1, F_2 et F_3 ?

2. Via une intégration par parties de $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$).

Exercice 18 - Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et que $\int_a^b f(t)\, dt = 0$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

Exercices complémentaires (extraits des contrôles de 2011 et 2012).

Exercice 19 - On note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

1. Donner une primitive de f_α pour $\alpha \neq 1$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $I_\alpha(x) = \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt$ pour $0 < x < 1$. Calculer la limite de I_α lorsque α tend vers 0^+. Pour quelles valeurs de α cette limite est-elle finie ?

3. De même, déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_1^y f_\alpha(t)\,dt$ pour $y > 1$. Pour quelles valeurs de α, la limite quand y tend vers $+\infty$ de $J_\alpha(y)$ est-elle finie ?

4. Effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans $J_\alpha(y)$. En déduire une relation entre $J_\alpha(y)$ et $I_\beta\left(\frac{1}{y}\right)$ pour un certain β que l'on explicitera.

5. Montrer que la question précédente reste valide lorsque $\alpha = 1$. Calculer $\lim_{y\to+\infty} J_1(y)$ et $\lim_{x\to 0^+} I_1(x)$.

6. Finalement, calculer $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/x} f_\alpha(t)\,dt$.

Exercice 20 - On définit pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Wallis: $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, ces intégrales vérifient la relation de récurrence: $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

4. Déduire de la question **2.**, que pour tout $n \geq 2$, $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout n entier, $(2n+1)I_{2n+1}I_{2n} = \frac{\pi}{2}$.

6. En déduire une expression analogue à celle de la question **3.** pour I_{2n+1}.