Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Feuille d'exercices n°3 — Dérivabilité d'ordre supérieur et DL

Exercice 1 - Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_k(x) = |x|^k$. Quel est le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f_k soit une fonction C^n sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 - 1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction C^3, bijective et dont la dérivée ne s'annule pas sur E. Trouver la formule donnant $(f^{-1})'''$.

2. On considère $f :]e^{-1}, +\infty[\to] - e^{-1}, +\infty[$, définie par la formule $f(x) = x \ln x$. Montrer que f est une bijection C^3.

3. Donner les valeurs de $f^{-1}(0)$, $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})''(0)$ et $(f^{-1})'''(0)$.

Exercice 3 - Considérer la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}^*$ est $C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

2. Montrer que f est $C^2(\mathbb{R})$ mais qu'elle n'est pas trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - donner le développement limité en x_0 à l'ordre n de la fonction f, lorsque f, n et x_0 sont:

1. $f(x) = (\ln(1 + x))^2$, avec $n = 4$ et $x_0 = 0$.

2. $f(x) = \ln(\sin x)$, avec $n = 3$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. $f(x) = e^{\sin x}$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

4. $f(x) = \cos(x) \ln(1 + x)$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

5. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{1+x}}$, avec $n = 3$ et $x_0 = 0$.

6. $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}))$, avec $n = 2$ et $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

7. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$, avec $n = 2$ et $x_0 = 0$.

Exercice 5 - Calculer les limites suivantes (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ pour le dernier):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - \sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}.$$

Exercice 6 - On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par la formule

$$f(x) = \frac{x^3 + \sin(2x) - 2 \sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Calculer, si elles existent, les limites de $f(x)$, lorsque x tend respectivement vers $-\infty$, 0 et $+\infty$.

Exercice 7 - Déterminer les valeurs $a \in \mathbb{R}$ telles que la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} + e^{x} - 2}{x^2}$$

existe et soit finie.

Exercice 8 - Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, à l'ordre 5 en $x_0 = 0$.

Exercice 9 - Même question, avec $g(x) = \ln(e^x - \sin x)$.

Exercice 10 - Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. En appliquant la formule de Taylor–Lagrange à la fonction $h(x) = \ln(1 + x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$, pour tout n. Comment utiliser ce résultat pour donner une approximation du nombre irrationnel $\ln(2)$?

Exercice 11 - Quel est le développement limité à l'ordre 3, en $x_0 = 1$ de la fonction: $f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$?

Exercice 12 - 1. Le point $x_0 = 0$ est-il un point où la fonction $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$ atteint un maximum ou un minimum local ? Dans ce cas, cet extremum est-il global ?

2. Mêmes questions, avec les fonctions

$$g(x) = (\arctan x)^2 - x^2\,, \quad h(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3\,.$$

Exercice 13 - Soit f la fonction définie par la formule:

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x(1 + x^2)}}{x - 1}\,.$$

1. Quel est l'ensemble de définition naturel de cette fonction ?

2. Donner le développement limité à l'ordre 4 du numérateur en $x_0 = 1$.

3. Grâce à l'ordre 1 de ce développement, montrer que f se prolonge par continuité en 1.

4. Grâce à l'ordre 3, montrer que la fonction prolongée est dérivable au point 1. Quelle est l'équation de sa tangente en 1 ?

5. Grâce à l'ordre 4, spécifier localement, autour de 1, la position du graphe de f par rapport à sa tangente.

Exercices complémentaires (extraits des contrôles de 2011 et 2012).

Exercice 14 - Donner le développement limité de $\cos(e^x - \cos x)$ en $x_0 = 0$, à l'ordre $n = 4$.

Exercice 15 - Calculer les limites suivantes quand x tend vers 0:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\,, \qquad \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}\,, \qquad \frac{1}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^3}\,.$$

Exercice 16 - On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - \sin(2x)}{x}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

2. En utilisant un développement limité, montrer que la dérivée de la fonction prolongée est nulle en 0. S'agit-il d'un extremum local ? (Si oui, lequel ?)

3. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ puis vers $+\infty$.

4. Montrer que la dérivée du numérateur est toujours positive. En déduire, s'ils existent, les extrema globaux de f.

Exercice 17 - 1. On pose $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x - 1$. Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ a une solution dans $]1, 2[$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On s'intéresse à sa restriction à $[0, 1]$. Pourquoi existe-t-il un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$? A-t-on nécessairement $f'(c) = 0$?

Exercice 18 - Ci-dessous, les développements limités en 0 de deux fonctions f et g. Esquisser leurs graphes au voisinage de 0 (on fera apparaître les tangentes aux graphes en 0 et les positions respectives des graphes par rapport à leurs tangentes).

$$f(x) = 2 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)\,, \qquad g(x) = -x^{2012} + 5x^{4000} + x^{4020}\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 19 - Calculer les trois limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x(1+x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (\cos x)^2}{\sin(x^2)}\,.$$

Exercice 20 - On étudie la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\tan x}{x}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note f la fonction prolongée.

2. Montrer que $\tan(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. En exprimant la dérivée de la fonction tangente en fonction de la fonction tangente, montrer que $\tan'(x) = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

3. En déduire le développement limité de la fonction f en $x_0 = 0$, à l'ordre 2.

4. Montrer que f est C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

5. Donner l'équation de Δ, la tangente au graphe de f passant par le point du graphe d'abscisse 0.

6. Préciser la position du graphe de f par rapport à Δ, au voisinage du point d'abscisse 0.