Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Feuille d'exercices n°2 — Continuité, dérivabilité

CONTINUITÉ

Exercice 1 - Pour quelles valeurs de c, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ (x-c)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? Donner l'allure des fonctions obtenues.

Exercice 2 - Pour tout réel c, on définit la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ |x-c| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de c, la fonction obtenue est-elle prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$? Donner l'allure de la fonction prolongée (que l'on notera encore f).

2. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x+1)$ est paire.

Exercice 3 - Soit la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 \sin x + x^2 \cos x + x \sin(2x) + \cos(2x)}{x^2 (\sin x)^2 + (\cos x)^2}$$

Vérifier qu'elle est bien définie pour tout x réel. Démontrer qu'elle admet un minimum mais pas de maximum.

Exercice 4 - Donner, s'il existe, un exemple de fonction continue bornée qui n'admet ni de minimum ni de maximum sur $[0, 1[$.

Exercice 5 - Donner des exemples de fonction f (éventuellement par son graphe) continue sur $[0, 1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait

1. une unique racine, en $x = \frac{1}{2}$.

2. exactement deux racines distinctes.

3. une infinité de racines.

Exercice 6 - Montrer que l'équation $\sin x = \frac{x}{x+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet une infinité de solutions (on peut considérer la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme $2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$).

Exercice 7 - Un cycliste parcourt 90 km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction d, donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t, est une fonction continue ?

2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 45 km.

3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi élément de I. Qu'en est-il pour 4 points ? Et pour n points ? (On observera que si x_0 et x_1 sont deux points d'un intervalle I, alors tous les points entre x_0 et x_1 appartiennent à I – cf. dernier exercice sur la continuité pour une définition de l'intervalle.)

4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80 minutes pendant le trajet durant lequel le cycliste a parcouru exactement 30 km.

5. Généraliser.

Exercice 8 - Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4} + 2x^2$. Les extrema considérés ci-dessous, sont des extrema globaux.

1. Démontrer que cette fonction admet un minimum et un maximum sur $[-a, a]$.

2. Est-il possible qu'elle admette un unique point de minimum et un unique point de maximum ?

3. En étudiant le signe de f au voisinage de 0, démontrer que pour tout $a > 0$ elle admet toujours au moins deux points de maximum.

Exercices complémentaires

Exercice 9 - Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, une fonction telle que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. f admet-elle un maximum global ? Admet-elle un minimum global ?

Exercice 10 - On admet la définition de l'intervalle suivante: $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous deux éléments de I, a et b avec $a < b$, l'on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a < x < b \Rightarrow x \in I$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que si I est un intervalle réel, alors $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Donner des exemples d'intervalles et de fonctions croissantes tels que les intervalles I et $f^{-1}(I)$ soit de types (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non-borné) différents.

DÉRIVABILITÉ

Exercice 11 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 - |x-2| & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 27 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

1. Déterminer ses points de continuité et ses points de dérivabilité.

2. Existe-t-il un minimum global et/ou un maximum global ? Les déterminer le cas échéant.

Exercice 12 - Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction suivante soit dérivable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si } x \geq 0 \\ bx + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 13 - Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = 1 + x - \frac{2x \ln x}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition naturel de f.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. Ce prolongement est-il dérivable en 0.

4. Montrer que pour tout $h > 0$, $h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(h+1) \leq h$ en étudiant rapidement les fonctions obtenues en prenant pour chaque inégalité la différence entre les deux termes.

5. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 14 - En utilisant la défintion de la dérivée en un point, calculer $f'(x_0)$ pour $x_0 = 2$ et $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Exercice 15 - Donner le domaine de définition, prolonger par continuité en 0 puis étudier la dérivabilité de

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad g(x) = \sin\sqrt{x}, \qquad h(x) = \cos\sqrt{x}\ .$$

Exercice 16 - À l'aide du théorème des accroissements finis, calculer la limite de $x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 17 - Montrer les inégalités suivantes:

1. Pour tous réels a et b, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

2. Pour tous réels x et h, $|\cos(x+h) - \cos x| \leq |h|$.

3. Pour tout réel x, $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$.

Exercice 18 - Déterminer les extrema (locaux et globaux) de la fonction $f : [-2, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = x^3 + |x|$ ainsi que les points où ils sont réalisés.

Exercice 19 - Construisez les tableaux de variations des fonctions suivantes:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-7)^2 + 2, \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+7}}, \qquad h(x) = x^2(x-5)^4\ .$$

Exercice 20 - Même question avec

$$f(x) = \cos x + \sin x, \qquad g(x) = \frac{x}{2} - \sin x, \qquad h(x) = x + 2\cos x\ .$$

Exercice 21 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2x - \arctan x$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Montrer que sa réciproque est (continue et) dérivable.

3. Retrouver la formule donnant $(f^{-1})'$ en fonction de f' et de f^{-1}. Calculer $(f^{-1})'\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. En étudiant f', déterminer son image. En déduire l'image de $(f^{-1})'$.