Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014

PeiPA 1ère année, S1

Mathématiques

Feuille d'exercices n°1 — Fonctions, limites

FONCTIONS

Exercice 1 - Tracer l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, racine carrée, exponentielle, logarithme népérien, sinus, cosinus, tangente. Pour chacune d'elles indiquer son domaine de définition naturel.

Exercice 2 - Déterminer les domaines de définition naturels des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}, \qquad h(x) = \ln(4x+3)\,.$$

Exercice 3 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Quelle est l'image de la fonction $f|_E$, restriction de la fonction f à l'ensemble E, lorsque $E = [-5,-2]$, $[-1,3]$, $[-5,-2] \cup [-1,3]$?

2. Déterminer les ensembles $f([-5,-2] \cap [-1,3])$ et $f([-5,-2]) \cap f([-1,3])$.

Exercice 4 - Soit a et b deux nombres réels et f la fonction donnée par la formule $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé.

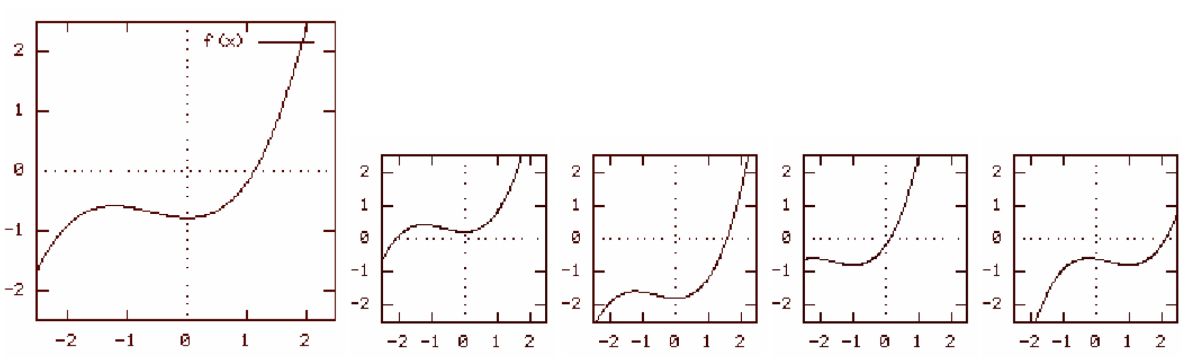
1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quel type de courbe s'agit-il ?

2. Déterminer l'équation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy et finalement par la symétrie centrale de centre O.

3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Peut-on exprimer ces fonctions à l'aide de f ?

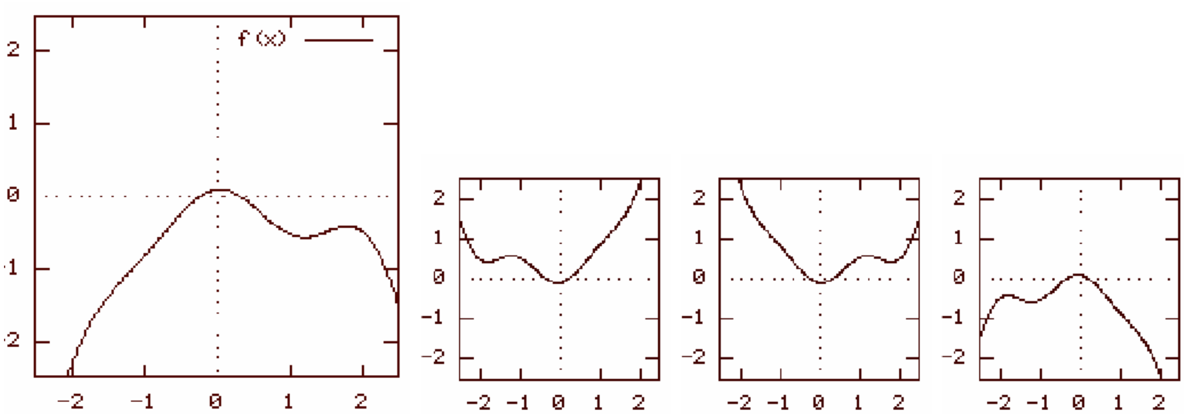
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe Δ, la droite donnée par l'équation $y = x$. À quelle condition la droite obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 5 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(x-1)$.

Exercice 6 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les trois dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto -f(x)$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto -f(-x)$.

Exercice 7 - Donner un exemple de fonction f et d'intervalle $I = [a, b]$ avec $a < b$, tels que

1. l'image de I par f n'est pas un intervalle.

2. l'image de I par f est un intervalle qui n'est pas fermé.

3. l'image de I par f est un intervalle qui n'est pas borné.

Exercice 8 - On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto 1 - x$. Vérifier que l'on peut composer ces fonctions puis donner les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 9 - Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer graphiquement les images réciproques des intervalles $[0, 1[$, $]\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 2]$ et $]1, 3]$.

Exercice 10 - Dire si les fonctions suivantes sont injectives sur leur domaine de définition. Déterminer leurs images et les fonctions réciproques quand celles-ci existent.

$$f(x) = \ln(\sqrt{x-1} + 1), \qquad g(x) = \tan\left(\frac{x}{1+|x|}\right), \qquad h(x) = \sqrt[3]{\tan(x^3)}\ .$$

Exercice 11 - Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 12 - Soit f et g deux fonctions définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f et g sont croissantes sur E, alors $f + g$ est croissante sur E.

2. Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E, la fonction produit $f \cdot g$ est croissante sur E.

3. On suppose que $f \circ g$ est définie sur E. Montrer que si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes sur E, alors la composée $f \circ g$ est croissante sur E.

4. En déduire la monotonie de la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{2\sqrt{x}+3}$.

LIMITES

Exercice 13 - 1. Trouver un intervalle ouvert non vide centré en 1 et sur lequel $|x+2|<4$.

2. Trouver, pour tout $\varepsilon>0$, un réel $\alpha>0$ tel que

$$|x-1|<\alpha \implies |x^2+x-2|<\varepsilon\ .$$

3. En déduire que les limites suivantes existent, et les calculer:

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-1, \qquad \lim_{x\to 1} x^2+x, \qquad \lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\cos(x)\ .$$

Exercice 14 - Étudier les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{\tan 5x}\right)\ .$$

Exercice 15 - On rappelle (ou l'on suppose connu) que $\frac{\sin x}{x}\to 1$ quand x tend vers 0. Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\ .$$

Exercice 16 - Déterminer les limites des fonctions données ci-dessous aux points indiqués.

1. $\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}$ en $+\infty$ puis en 1.

2. $(3x^4-2x^2)e^{-x}$ en $+\infty$.

3. $(3x^2-2x)e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

4. $(3x^2-2x)e^{-2\ln x}$ en $+\infty$.

5. $\frac{2x+3}{3x^4+2}\,e^{x}$ en $+\infty$.

6. $\sqrt{x}\ln(x^2+2x)$ en 0 puis en $+\infty$.

7. $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x^2+2x)$ en 0 puis en $+\infty$.