Polytech Paris-Sud
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Orsay 2013–2014

Contrôle continu de Mathématiques – Seconde session

Lundi 3 mars 2014 – Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. Questions de cours (4 points)

(1) Rappeler la définition de l'injectivité d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$.

(2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = a(t)y$.

(3) Dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on se donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

(a) Rappeler la formule donnant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(b) Quelles sont les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le produit vectoriel de $\vec{u}$ avec $\vec{v}$?

(4) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec x et y des fonctions C^1 définies sur I. Rappeler la formule donnant la distance parcourue entre les instants t_0 et t_1.

Exercice 2. (7 points)

(1) Calculer les limites: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sin x+\cos x}{x^2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

(2) On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(a) Déterminer la formule donnant sa dérivée, f'.

(b) Donner le développement limité de f en $x_0 = 0$, à l'ordre 5.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x) + x - 1$.

(a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

(b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(c) En déduire que x_0 est l'unique nombre réel positif tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 3. (7 points)

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $ABCD$ de sommets $A\,(-1, -1)$, $B\,(3, 3)$, $C\,(-1, 7)$ et $D\,(-5, 3)$.

(1) Représenter ABCD graphiquement.

(2) Déterminer une équation de $\mathcal{D}$, la médiatrice de $[AB]$.

(3) Donner une équation de la droite (AC).

(4) En déduire les coordonnées de O, point d'intersection de $\mathcal{D}$ et (AC).

On rappelle que l'affixe complexe d'un point M de coordonnées (x, y) est $z_M = x + iy$. On note $s : z \mapsto az + b$ la similitude directe de centre A transformant B en O.

(5) Déterminer les nombres complexes a et b.

(6) Déterminer l'écriture polaire de a. En déduire l'angle et le rapport de la similitude s.

(7) Déterminer (graphiquement ou par le calcul) l'image de $ABCD$. Représenter graphiquement la figure obtenue.

Exercice 4. (6 points)
On veut étudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Pour cela on étudie tout d'abord la fonction g définie par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$ sur $]0, +\infty[$.

(1) Montrer que g est C^1 et que $g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

(2) Calculer $g''(x)$ pour tout $x > 0$ et montrer que g' est strictement monotone sur $]0, +\infty[$.

(3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$. En déduire que g est strictement monotone sur $]0, +\infty[$.

(4) En utilisant le développement limité de la fonction $h \mapsto \ln(1 + h)$ en 0 à l'ordre 1, calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(5) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.