Polytech Paris-Sud | Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Correction du contrôle de Mathématiques de seconde session
du lundi 3 mars 2014 – Durée : 1h30.

Exercice 1. Questions de cours (4 points)

(1) Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$ est injective si pour tous x et y dans A, $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$. De manière alternative, on dit que f est injective si tout réel a au plus un antécédent dans A par f.

(2) Les solutions de l'équation différentielle $y' = a(t)y$ sont les fonctions $y(t) = Ce^{A(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(x)\,dx$ pour un certain $t_0 \in I$.

(3) (a) Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel donné par $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

(b) Le produit vectoriel de $\vec{u}$ avec $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -u_1v_3 + u_3v_1 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

(4) La distance parcourue le long de γ entre les instants t_0 et $t_1 \in I$ est donnée par

$$d(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

Exercice 2. (7 points)

(1)
- Comme les fonctions sinus et cosinus sont à valeurs dans $[-1, 1]$, $|2x \sin x + \cos x| < 2|x| + 1$ et donc

$$0 < \left| \frac{2x \sin x + \cos x}{x^2} \right| < \frac{2|x| + 1}{x^2} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

Par le théorème des gendarmes, on détermine que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x \sin x + \cos x}{x^2} = 0$.

- Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (par exemple en faisant le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 1), et que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ on a évidemment $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$.

(2) (a) Comme f est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, $f'(x) = e^{-x^2}$.

(b) Il suffit de déterminer le développement limité à l'ordre 4 de sa dérivée. On se rappelle (ou on recalcule) le développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 2 en 0: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. En remplaçant t par $-x^2$ (qui tend aussi vers 0 quand x tend vers 0), on obtient $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$.

Finalement par intégration, $f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On conclut en remarquant que $f(0) = 0$.

(3) (a) Comme $f(0) = -1 < 0$ et que $f(1) = \ln 2 > 0$ (par croissance du logarithme) et comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe bien $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

(b) La fonction f est C^1 et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Comme f est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$, elle y est injective. Donc x_0 est l'unique élément de $\mathbb{R}^+$ avec cette propriété.

Exercice 3. (7 points)

(1) (Voir figure 1.)

(2) $\mathcal{D}$ est la droite orthogonale à (AB) et passant par le milieu, I, de $[AB]$. Donc un point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Or les coordonnées de I sont $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1,1)$ et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $(4,4)$. Donc $M = (x,y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $4(x-1) + 4(y-1) = 0$ i.e $x + y - 2 = 0$ qui est donc une équation de $\mathcal{D}$.

(3) Comme A et C ont tous deux -1 pour abscisse, $x = -1$ est une équation de la droite (AC).

(4) Les coordonnées du point O satisfont les équations $x = -1$ et $x + y - 2 = 0$, on trouve immédiatement que $x = -1$ et $y = 3$.

(5) Les affixes respectives de A, O et B sont $z_A = -1 - i$, $z_O = -1 + 3i$ et $z_B = 3 + 3i$. Comme s envoie B sur O et fixe A (par définition du centre), a et b satisfont:

$$-1 + 3i = a(3 + 3i) + b \quad \text{et} \quad -1 - i = a(-1 - i) + b\,.$$

En soustrayant les deux équations, on obtient que $4i = a(4 + 4i)$ soit $a = \frac{i}{1+i}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur pour obtenir $a = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2}$. En remplaçant a dans la seconde équation, on trouve alors que $b = (-1 - i) + \frac{1}{2}(1 + i)(1 + i) = (-1 - i) + i = -1$.

Donc $s : z \mapsto \frac{1+i}{2} z - 1$.

(6) Le module de a est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On obtient que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta$ et donc $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que s est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

(7) On peut par exemple faire le calcul des coordonnées des images C' et D' des points C et D par s. On a $z_{C'} = \frac{1+i}{2} z_C - 1 = \frac{1+i}{2}(-1 + 7i) - 1 = -5 + 3i$. Donc l'image de C par s est D.

De même, $z_{D'} = \frac{1+i}{2} z_D - 1 = \frac{1+i}{2}(-5 + 3i) - 1 = -5 - i$. L'image de $ABCD$ est donc $AODD'$ avec D' de coordonnées $(-5, -1)$. (Voir figure 1.)

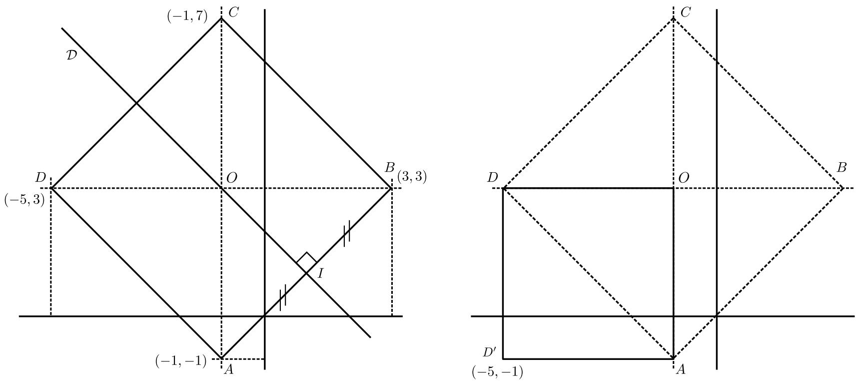

FIGURE 1. Le carré $ABCD$ et son image par s, $AODD'$

Exercice 4. (6 points)

(1) Sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est C^1 et son image est incluse dans $[1, +\infty[$, intervalle sur lequel $x \mapsto \ln x$ est C^1. Donc g définie par $g(x) = \ln\big(f(x)\big) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est C^1 par composition de fonctions C^1 (et par opérations usuelles sur de telles fonctions). Donc sa dérivée existe et vaut $g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

(2) La fonction obtenue étant C^1 également, on peut calculer $g''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$. On obtient $g''(x) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-1}{x(x+1)}$ qui est strictement négatif pour tout $x > 0$. Donc g' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

(3) Par opérations usuelles, $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0$. On en déduit que g' est strictement positive et donc que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(4) Le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction $\varphi : h \mapsto \ln(1 + h)$ est $\varphi(h) = \varphi(0) + \varphi'(0)h + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Or $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$, on obtient $\varphi(h) = h + h\varepsilon(h)$.

En remplaçant h par $\frac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on obtient que $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

(5) Comme $f(x) = e^{g(x)}$ pour tout $x > 0$ et que g et la fonction exponentielle sont croissantes, f est croissante comme leur composée. De plus comme la fonction exponentielle est continue, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\lim_{x \to +\infty} g(x)} = e$.