POLYTECH PARIS-SUD — ORSAY 2013–2014
PEIPA 1ÈRE ANNÉE, S1
MATHÉMATIQUES

CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°4

du mardi 7 janvier 2014 – Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. (5 points)
Soit trois points A, B, C de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées respectives $(3, 1, 2)$, $(1, 3, 0)$ et $(4, 4, 2)$.

(1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(3) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis en donner sa norme.

(4) Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.

Exercice 2. (7 points)
Soit trois points A, B et C de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées respectives $(0, 0)$, $(3, 0)$ et $(0, 4)$.

(1) On note $\mathcal{D}$ la hauteur du triangle ABC passant par A. Donner une équation de $\mathcal{D}$.

(2) Donner une équation de la droite (BC).

(3) Montrer que H, le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et (BC), a pour coordonnées $\left(\frac{48}{25}, \frac{36}{25}\right)$.

On rappelle que l'affixe complexe d'un point M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) est le nombre complexe $z = x + iy$.

(4) Donner les affixes complexes des points A, B et C.

(5) Déterminer la similitude directe, $z \mapsto az + b$, qui transforme A en C et B en A. Donner son rapport et son angle.

(6) Montrer que le centre de la similitude de la question (5) est H. Que pouvez-vous en déduire sur les triangles ABH et CAH?

Exercice 3. (10 points)
On veut représenter l'image Γ de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec $x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t)$ et $y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$.

(1) (a) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.

(b) Montrer que Γ admet un axe de symétrie permettant de réduire l'étude à $[0, \pi]$.

(c) En comparant $\gamma(t)$ et $\gamma(\pi - t)$, montrer que Γ admet un second axe de symétrie permettant de réduire l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) Montrer que $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$ et que $\cos(3t) = -3\cos(t) + 4\cos^3(t)$.

(3) Tracer le tableau de variation associé à γ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) Donner l'équation de la tangente à Γ au point $\gamma(\frac{\pi}{4})$, puis au point $\gamma(\frac{\pi}{2})$.

(5) Montrer que la tangente à Γ au point $\gamma(0)$ est horizontale.

(6) Tracer Γ. (On utilisera la valeur approchée 1,4 pour $\sqrt{2}$.)

On veut à présent calculer la longueur de Γ.

(7) Rappeler la formule donnant $L(0, t_0)$, la longueur parcourue entre les instants 0 et t_0.

(8) Montrer que la longueur parcourue entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$ est

$$L\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{2(1-\cos(2t))}\,dt\,.$$

(9) En utilisant la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, calculer $L\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. En déduire la longueur totale, $L(-\pi, \pi)$.

Exercice 4. (2 points)

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et on suppose qu'elle est différentiable au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Donner l'expression du vecteur gradient de f au point (x_0, y_0), $\overrightarrow{\nabla}_{(x_0,y_0)} f$.

(2) Soit $c \in \mathbb{R}$. Écrire la définition de la ligne de niveau c de la fonction f.