Polytech Paris-Sud
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Orsay 2013–2014

Correction du contrôle continu de Mathématiques n°4

du mardi 7 janvier 2014 – Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. (5 points)

(1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1-3, 3-1, 0-2) = (-2, 2, -2)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(4-3, 4-1, 2-2) = (1, 3, 0)$.

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times 1 + 2 \times 3 + (-2) \times 0 = 4$.

(3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2 \times 0 - (-2) \times 3, -(-2) \times 0 + (-2) \times 1, (-2) \times 3 - 2 \times 1) = (6, -2, -8)$. Il vient $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 4 + 64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

(4) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées (x, y, z). Le point M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-3, y-1, z-2)$. Ainsi $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 6(x-3) - 2(y-1) - 8(z-1)$. Le plan $\mathcal{P}$ admet donc l'équation $3(x-3) - (y-1) - 4(z-1) = 0$ c'est-à-dire $3x - y - 4z = 0$.

Exercice 2. (7 points)

(1) La droite $\mathcal{D}$ contient le point A et admet $\overrightarrow{BC}$ comme vecteur normal. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-3, 4)$. Soit M un point de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x, y). Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (x, y). Le point M appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. La droite $\mathcal{D}$ admet donc pour équation $-3x + 4y = 0$.

(2) On cherche une équation de la droite (BC) sous la forme $px + qy + r = 0$. Comme B et C appartiennent à cette droite, on a $\begin{cases} 3p + 0q + r = 0 \\ 0p + 4q + r = 0 \end{cases}$.
Si l'on veut $(p, q, r) \neq 0$, on a nécessairement $r \neq 0$ et $p = -r/3$ et $q = -r/4$. On peut choisir pour r n'importe quelle valeur non-nulle. En choisissant $r = -12$, on obtient pour (BC) l'équation $4x + 3y - 12 = 0$.

(3) Notons (h, k) les coordonnées de H. Elles vérifient $\begin{cases} -3h + 4k = 0 \\ 4h + 3k = 12 \end{cases}$.
On a, par équivalences,

$$\begin{cases} -3h + 4k &= 0 \\ 4h + 3k &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} h &= \frac{4}{3}k \\ \frac{16}{3}k + 3k &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} h &= \frac{4}{3}k \\ \frac{25}{3}k &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} h &= \frac{48}{25} \\ k &= \frac{36}{25} \end{cases}.$$

(4) Les points A, B et C ont respectivement pour affixe les nombres complexes 0, 3 et $4i$.

(5) Notons s la similitude $z \mapsto az + b$ qui transforme A en C et B en A. On a les équations

$$\begin{cases} a0 + b &= 4i \\ 3a + b &= 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b &= 4i \\ a &= -\frac{4}{3}i \end{cases} \quad \text{et donc} \quad s : z \mapsto -\frac{4}{3}iz + 4i.$$

La similitude s a donc comme rapport $\left|-\frac{4}{3}i\right| = \frac{4}{3}$ et comme angle $\operatorname{Arg}\left(-\frac{4}{3}i\right) = -\frac{\pi}{2}$.

(6) L'affixe de H est $\omega = \frac{48}{25} + \frac{36}{25}i$. Il vient donc

$$s(\omega) = -\frac{4}{3}i\left(\frac{48}{25} + \frac{36}{25}i\right) + 4i = 4i\left(-\frac{16}{25} - \frac{12}{25}i + 1\right) = \frac{48}{25} + \frac{36}{25}i = \omega\,.$$

La similitude s n'est pas l'identité et fixe le point H, H en est donc le centre. La similitude s transforme ABH en CAH, ces triangles sont donc semblables.

Exercice 3. (10 points)

(1) (a) x et y sont 2π–périodiques, on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.

(b) Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Ainsi, $\gamma(-t)$ est le symétrique de $\gamma(t)$ par rapport à l'axe Ox qui est donc un axe de symétrie de Γ. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

(c) Pour tout $t \in [0, \pi]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Ainsi, Oy est un axe de symétrie de Γ et l'on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) On a $\cos(3t) + i\sin(3t) = e^{3it} = \left(e^{it}\right)^3 = (\cos(t) + i\sin(t))^3$. On a

$$\begin{aligned}(\cos(t) + i\sin(t))^3 &= \cos(t)^3 + 3\cos(t)^2(i\sin(t)) + 3\cos(t)(i\sin(t))^2 + (i\sin(t))^3 \\ &= \cos(t)^3 - 3\cos(t)\sin(t)^2 + i\left(3\cos(t)^2\sin(t) - \sin(t)^3\right)\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\cos(3t) = \cos(t)^3 - 3\cos(t)\sin(t)^2$ et en remplaçant $\sin(t)^2$ par $1 - \cos(t)^2$, on obtient $4\cos(t)^3 - 3\cos(t)$ et $\sin(3t) = 3\cos(t)^2\sin(t) - \sin(t)^3 = 3\sin(t) - 4\sin(t)^3$ en remplaçant $\cos(t)^2$ par $1 - \sin(t)^2$.

(3) On calcule γ':

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3(-\sin(t) + \sin(3t)) \\ &= 3(-\sin(t) + 3\sin(t) - 4\sin(t)^3) \\ &= 6\sin(t)(1 - 2\sin(t)^2)\,, \text{ et} \\ y'(t) &= 3(\cos(t) - \cos(3t)) \\ &= 3(\cos(t) + 3\cos(t) - 4\cos(t)^3) \\ &= 12\cos(t)(1 - \cos(t)^2) = 12\cos(t)\sin(t)^2\end{aligned}$$

et on déduit le tableau de variation:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0		$+$		0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

(4) La tangente à Γ au point $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour équation $x = 2\sqrt{2}$. La tangente à Γ au point $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour équation $y = 4$.

(5) Comme $\gamma'(0) = 0$, on calcule $\gamma''(0)$. Or $\gamma''(t) = (-3\cos(t) + 9\cos(3t), -3\sin(t) + 9\sin(3t))$. D'où $\gamma''(0) = (6, 0) \neq 0$ et donne donc la pente de la tangente à Γ en $\gamma(0)$. Celle-ci est donc bien horizontale.

(6) Voir figure 1.

(7) La formule est $L(0, t_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

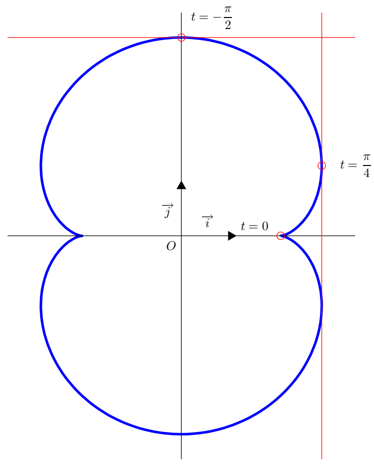

FIGURE 1. Tracé de Γ.

(8) On trouve

$$\begin{aligned}(x'(t))^2+(y'(t))^2 &= 9(-\sin(t)+\sin(3t))^2+9(\cos(t)-\cos(3t))^2\\ &= 9(\sin(t)^2-2\sin(t)\sin(3t)+\sin(3t)^2+\cos(t)^2-2\cos(t)\cos(3t)+\cos(3t)^2)\\ &= 9(2-2(\cos(3t)\cos(t)+\sin(3t)\sin(t)))=18(1-\cos(3t-t))=18(1-\cos(2t))\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$L\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2(1-\cos(2t))}\,dt\,.$$

(9) On a finalement

$$L\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2(1-(1-2\sin(t)^2))}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{4\sin(t)^2}\,dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,dt=6\,.$$

D'après les symétries étudiées à la question (1), $L(-\pi,\pi)=4L\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, donc $L(-\pi,\pi)=24$.

Exercice 4. (2 points)

(1) Le vecteur $\vec{\nabla}_{(x_0,y_0)}f$ a pour coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

(2) La ligne de niveau c de la fonction f est l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,f(x,y)=c\right\}$.