Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Contrôle continu de Mathématiques n°3

du lundi 2 décembre 2013 – Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. Questions de cours (4,5 points)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et c un nombre réel.

(a) Donner la formule de F, la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en c.

(b) Écrire $\int_x^{\sin x} f(t)\,dt$ en fonction de F.

(2) (a) Énoncer précisément le théorème d'intégration par parties sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

(b) Calculer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2. (7 points)

(1) (a) Déterminer les primitives de la fonction $\frac{1}{x \ln x}$ sur $]1, +\infty[$.

(b) Déterminer la primitive de $\frac{4x}{(x-2)^2}$ qui s'annule en $x = 3$.
(Indication: trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$.)

(c) Calculer, grâce à un changement de variables approprié, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos(x)} \sin(2x)\,dx$.

(2) Déterminer toutes les solutions des équations différentielles suivantes:

(a) $y' = (1+y^2)e^t$ sur le plus grand intervalle possible (à spécifier),

(b) $y' = ty + t$ sur le plus grand intervalle possible (à spécifier),

(c) $3ty' - 4y = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. (4,5 points)

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)$.

(1) En justifiant avec soin, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est impaire.

(3) Calculer f'.

(4) En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est une solution.

Exercice 4. (7 points)
On cherche à déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(1) Calculer I_0 et I_1.

(2) Rappeler (et prouver !) la formule liant la fonction tangente à sa dérivée.

(3) Montrer par un calcul direct que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

(4) En déduire, par récurrence, que pour tout entier $p \geq 1$,

$$I_{2p+1} = (-1)^p \left(I_1 - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \right) .$$

(5) On admet que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Déduire de (4) la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

(6) Déduire de (3), par récurrence sur $p \geq 1$, la valeur de I_{2p}.

(7) Déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

[FIN DU CONTRÔLE]

*** Questions non notées, à faire à la maison. ***

Exercice 4 (suite).
Pour conclure, on cherche à montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour cela on fixe $\varepsilon > 0$ (et $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$) et on veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $0 \leq I_n < \varepsilon$.

(8) Montrer que pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \tan^n x$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et en déduire:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}} \tan^n(x) \, dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

(9) Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ et en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $\frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(10) Montrer que pour tout entier n et tout x de $[0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan^n x \leq 1$ et en déduire que

$$\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

(11) Conclure.