POLYTECH PARIS-SUD — ORSAY 2013–2014
PEIPA 1ÈRE ANNÉE, S1
MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°3
du lundi 2 décembre 2013 – Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Questions de cours (4,5 points)

(1) (a-b) $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, et donc $\int_x^{\sin x} f(t)\,dt = F(\sin x) - F(x)$.

(2) (a) cf. cours, (b) Par IPP, $\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (7,5 points)

(1) (a) Par changement de variable $u = \ln x$ (qui est bien une bijection C^1: $]1, +\infty[\to \mathbb{R}_*^+$), on a $x = e^u$ et $du = \frac{dx}{x}$. On écrit :

$$F(x) = \int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c\,.$$

Comme $x > 1$, $\ln x > 0$ et il vient $F(x) = \ln(\ln x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. (On pouvait aussi reconnaître la forme $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = \ln x$.)

(b) Par identification, on trouve $a = 4$ et $b = 8$. On en déduit les primitives demandées:

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}dx = \int\left(\frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}\right)dx = 4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

(c) Via le changement de variable $u = \cos x$ (et donc $du = -\sin x\,dx$) qui est bien une bijection C^1: $[0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, et en remplaçant $\sin(2x)$ par $2\sin x\cos x$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos(x)}\sin(2x)dx = -2\int_1^0 ue^u du = 2\int_0^1 ue^u du$$
$$= \left[2ue^u\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^u du = (2e^1 - 0) - 2(e^1 - 1) = 2\,.$$

(2) (a) Comme $1+y^2 \neq 0$, on obtient une équation différentielle à variables séparées équivalente: $\frac{y'}{1+y^2} = e^t$. Par intégration, il vient immédiatement $\arctan(y(t)) = e^t + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Ceci est possible si et seulement si $e^t + c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire $e^t \in]-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c[$. Comme $e^t > 0$, $c < \frac{\pi}{2}$ et la solution $y(t) = \tan(e^t + c)$ est définie sur l'intervalle

- $\left]\ln\left(-\frac{\pi}{2} - c\right), \ln\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\right[$ si $c < -\frac{\pi}{2}$,
- $\left]-\infty, \ln\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\right[$ si $-\frac{\pi}{2} \leq c < \frac{\pi}{2}$.

(b) Ceci est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, résolue, ses solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme: $y(t) = e^{A(t)}(C + \int_{t_0}^t se^{-A(s)}ds)$ avec t_0 et $C \in \mathbb{R}$ et A une primitive de t. On choisit $A(t) = \frac{t^2}{2}$ et l'on trouve: $y(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}} - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(c) Sur $\mathbb{R}_*^+$, cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 est équivalente à l'équation résolue: $y' = \frac{4}{3t}y + \frac{1}{3}$. En procédant comme précédemment, on obtient les solutions: $y(t) = Ct^{\frac{4}{3}} - t = t(Ct^{\frac{1}{3}} - 1)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. (4,5 points)

(1) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est C^∞ (et donc C^1) sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions C^∞. De même, $x \mapsto e^{x^2}$ est C^∞ (et donc continue) sur $\mathbb{R}$. Elle est donc intégrable et sa primitive qui s'annule en 0, $\int_0^x e^{t^2} dt$, est C^1. La fonction f est donc C^1 comme produit de fonctions C^1.

(2) Le domaine de f est bien symétrique par rapport à 0 et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2}\left(\int_0^{-x} e^{t^2}\, dt\right) = e^{-x^2}\left(-\int_0^{x} e^{(-u)^2}\, du\right) = -e^{-x^2}\left(\int_0^{x} e^{u^2}\, du\right) = -f(x)$$

et f est bien impaire (la seconde égalité venant du changement de variable $u = -t$).

(3) f est un produit de fonctions et la dérivée de $\int_0^x e^{t^2} dt$ est e^{x^2}. On a donc pour tout x:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right) + e^{-x^2}(e^{x^2}) = -2xe^{-x^2}\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right) + 1\,.$$

(4) On reconnaît f dans l'expression ci-dessus: $f'(x) = -2xf(x) + 1$. La fonction f est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1: $y' = -2xy + 1$.

Exercice 4. (7 points)

(1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = [-\ln(|\cos x|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}$

(2) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan x)' dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

(4) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{P}(p)$ la propriété: $I_{2p+1} = (-1)^p \left(I_1 - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\right)$.

• Initialisation. Pour $p = 1$, $I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = (-1)\left(I_1 - \frac{1}{2}\right)$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai.

• Hérédité. Soit $p > 1$. On suppose que $\mathcal{P}(p-1)$ est vraie. Par (3), $I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - I_{2p-1}$ et donc par $\mathcal{P}(p-1)$:

$$I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - (-1)^{p-1}\left(I_1 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\right) \qquad \text{avec } -(-1)^{p-1} = (-1)^p \text{ et donc:}$$

$$I_{2p+1} = (-1)^p\left(I_1 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} + \frac{(-1)^p}{2p}\right) = (-1)^p\left(I_1 - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\right).$$

Donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie et par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geq 1$.

(5) Comme $\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{u_p}{2}$, d'après (4) on a pour tout p, $u_p = 2(I_1 - (-1)^p I_{2p+1})$. Comme on suppose que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, I_{2p+1} tend vers 0 quand p tend vers l'infini et u_p tend vers $2I_1 = \ln 2$.

(6) En procédant comme en (4), on obtient dans ce cas: $I_{2p} = (-1)^p \left(I_0 - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.

(7) En procédant comme en (5), on obtient ici $v_p = I_0 - (-1)^p I_{2p}$. Comme I_{2p} tend vers 0 quand p tend vers l'infini, v_p tend vers $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

[FIN DU CONTRÔLE]

Exercice 4 (suite).

(8) La fonction $x \mapsto \tan x$ est croissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ pour tout n, $x \mapsto (\tan x)^n$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ pour tout n. (On peut aussi étudier cette fonction en la dérivant.)

On a donc, par croissance, $\tan^n x \leq \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2})$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}} \tan^n(x)\, dx \leq \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}} dx \leq \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

(9) La fonction tangente est strictement croissante et donc $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{4} \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) = 0$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $\frac{\pi}{4} \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(10) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$ et donc pour tout $n \geq 0$, $\tan^n x \leq 1$. Par positivité de l'intégrale, $\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\varepsilon}{2}$.

(11) En utilisant la relation de Chasles et les questions (8) et (10), on a pour tout entier $n > 0$,

$$0 \leq I_n = \underbrace{\int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x\, dx}_{\leq \frac{\pi}{4} \tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2})} + \underbrace{\int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x\, dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

Maintenant, la question (9) donne que pour tout $n > N$, $0 \leq I_n < \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ (assez petit), I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.