POLYTECH PARIS-SUD — ORSAY 2013–2014
PEIPA 1ÈRE ANNÉE, S1
MATHÉMATIQUES

CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°2

du lundi 4 novembre 2013 – Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. Questions de cours (3 points)

(1) On suppose que f et g sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et que g ne s'annule pas. Rappeler les formules donnant les dérivées des fonctions suivantes:

$$\text{(i) } g \circ f\ , \qquad \text{(ii) } f \cdot g\ , \qquad \text{(iii) } \frac{f}{g}\ .$$

(2) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Donner la formule définissant la dérivée de $\sin(\ln(f))$.

Exercice 2. (7 points)

(1) Déterminer les limites suivantes:

$$\text{(i) } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}\ , \qquad \text{(ii) } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\ , \qquad \text{(iii) } \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}\ .$$

(2) Donner les développements limités à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ des fonctions suivantes:

$$\text{(i) } \sqrt{1+x}\ , \qquad \text{(ii) } \ln(1+x^2)\ , \qquad \text{(iii) } \sin x\ , \qquad \text{(iv) } e^{x^6}\ .$$

Exercice 3. (9 points)

Partie 1: Continuité et bijectivité.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\ .$$

(1) Étudier les limites de f en 0 (par valeurs supérieures) et en $+\infty$. En déduire que f se prolonge par continuité en zéro. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Étudier la monotonie de f et montrer qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image que l'on précisera.

(3) Donner sa fonction réciproque f^{-1} et en calculer la dérivée.

Partie 2: Prolongement C^∞.

(4) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x^n} \, e^{-\frac{1}{x}} \right)$.

(5) Montrer que la dérivée de f se prolonge par continuité en zéro.

(6) Montrer par récurrence sur n, que pour tout n il existe un polynôme Q_n tel que:

$$f^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \, .$$

(7) En déduire que f se prolonge de manière C^∞ en zéro.

Exercice 4. (5 points)

Soit I un intervalle ouvert. Soit $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞. On rappelle que pour une telle fonction f et un entier naturel n, $f^{(n)}$ dénote la n-ième dérivée de la fonction f avec, par convention, $f^{(0)} = f$.

Une fonction $f \in C^\infty(I)$ est dite *absolument monotone* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\forall \, x \in I, \; f^{(n)}(x) \geq 0 \, .$$

(1) Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 1$ est absolument monotone sur $[-1, +\infty[$.

(2) Montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$, qu'un polynôme de degré d dont les coefficients sont tous positifs est absolument monotone sur $\mathbb{R}^+$.

(3) Soit f une fonction telle que sa dérivée $f^{(1)} = f'$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un nombre réel c tel que la fonction $f + c$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}^+$.

(4) Montrer que si f et g sont absolument monotones et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $f + g$ et λf le sont aussi.

On admet la formule de Leibniz donnant la dérivée n-ième de deux fonctions f et g:

$$\text{(L)} \qquad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où les C_n^k sont les coefficients positifs donnés par: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

(5) En déduire que $f \cdot g$ est absolument monotone si f et g sont absolument monotones.