Polytech Paris-Sud
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Orsay 2013–2014

Correction du contrôle continu de Mathématiques n°2
du lundi 4 novembre 2013 – Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Questions de cours (3 points)

(1) (i) $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$, (ii) $(fg)' = f'g + g'f$, (iii) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

(2) En appliquant la formule de composée des dérivées et le fait que $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$, on en déduit:

$$(\sin(\ln(f)))' = (\ln(f))' \cos(\ln(f)) = \frac{f'}{f} \cos(\ln(f)) .$$

Exercice 2. (7 points)

(1) (i) On factorise numérateur et dénominateur par x^2 et on simplifie ensuite pour obtenir:

$$\frac{x^2 + \sin(x)}{x^2 + \cos(x)} = \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x^2}}{1 + \frac{\cos(x)}{x^2}} .$$

Maintenant, nous avons: $0 \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Il résulte alors du théorème d'encadrement que $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$. De même: $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = 0$, d'où l'on obtient que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{x^2 + \cos(x)} = 1 .$$

(ii) On remarque que c'est le taux d'accroissement en zéro de la fonction sinus, d'où:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1 .$$

(Un développement limité à l'ordre 1 de la fonction sinus donne aussi le résultat.)

(iii) On rappelle que la dérivée de tangente est donnée par : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Comme $\tan(0) = 0$, la limite à calculer est le taux d'accroissement de tangente en zéro d'où nous déduisons:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = (\tan)'(0) = 1 .$$

(On peut aussi utiliser (ii) et le fait que $\cos(0) = 1$.)

(2) (i) D'après le cours: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$ en 0.

(ii) $\ln(1 + x^2) = x^2 + x^3\varepsilon(x)$ en 0, car le terme suivant est d'ordre 4.

(iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ en 0.

(iv) $e^{x^6} = 1 + x^3\varepsilon(x)$ en 0, car le premier terme en x est d'ordre 6.

Exercice 3. (9 points)

Partie 1: Continuité et bijectivité.

(1) On fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et on obtient:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = 0\,.$$

Donc f se prolonge par continuité en zéro en posant $f(0) = 0$. De plus, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement, en $+\infty$, nous avons:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0} e^{-X} = 1\,.$$

(2) On vient de voir que la fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+$, $e^{-\frac{1}{x}}$ est strictement croissante comme composée de fonctions strictement croissantes (exponentielle et $x \mapsto -\frac{1}{x}$). On déduit de ceci et de (1) qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]0,1[$.

(3) Par (2), $f^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}_+^*$ est bien définie. Pour trouver son expression, on résout l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x. Nous avons alors en passant au logarithme:

$$-\frac{1}{x} = \ln(y)\,, \quad \text{d'où } f^{-1}(y) = -\frac{1}{\ln(y)}\,.$$

Il résulte alors que sa dérivée vaut:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{y\ln(y)^2}\,.$$

Partie 2: Prolongement C^∞.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$, à nouveau on pose $X = \frac{1}{x}$, pour obtenir:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^n}\, e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{X\to+\infty} X^n e^{-X} = 0\,.$$

(5) La dérivée de f vaut $\frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend donc vers 0 en 0 par ce qui précède.

(6) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on prend $Q_0 = 1$. Passons de n à $n+1$. On a par hypothèse de récurrence au rang n:

$$f^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\,,$$

que l'on dérive comme composée et produit de fonctions, d'où:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\, Q_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\, Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,.$$

Il ne nous reste plus qu'à poser $Q_{n+1}(X) = -X^2 Q_n'(X) + X^2 Q_n(X)$, pour obtenir ce qu'on voulait. La proposition étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(7) On écrit $Q_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sum\limits_{i=1}^{l} a_i \frac{1}{x^i}$ et par linéarité de la limite, pour démontrer que $f^{(n)}$ se prolonge par continuité en zéro, on a juste à calculer la limite en zéro de $\frac{a_i}{x^i}\, e^{-\frac{1}{x}}$, ce qui est l'objet de la question (4).

Exercice 4. (5 points)

(1) On calcule les dérivées successives de f, on a:

$$f'(x) = 2x + 2\,, \quad f''(x) = 2 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } n \geq 3\,.$$

De plus, $f(x) = (x+1)^2$. On obtient donc que f et toutes ses dérivées successives sont positives sur $\mathbb{R}$, sauf pour $f^{(2)}$ qui est positive sur $[-1, +\infty[$. f est donc absolument monotone sur cet intervalle.

(2) Un polynôme de degré 0 à coefficients positifs est (évidemment !) absolument monotone (sur $\mathbb{R}$). Supposons que tout polynôme de degré d à coefficients positifs soit absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$. Soit P un polynôme à coefficients positifs de degré $d+1$, P' est alors un polynôme de degré d dont tous les coefficients sont aussi positifs. Il est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse de récurrence. De plus, comme P est à coefficients positifs, $P(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et P est donc absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$, ce qui termine la récurrence.

(3) La fonction f' étant absolument monotone, elle est en particulier positive, donc f est croissante. Prenons alors $c = -f(0)$ et montrons que la fonction $f + c$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, par croissance de f, $f(x) \geq f(0)$ donc $f(x) - f(0) \geq 0$ et la fonction $f + c$ est bien positive. Comme la dérivée de $f + c$ est f' qui est absolument monotone sur $\mathbb{R}$, on obtient que $f + c$ l'est également sur $\mathbb{R}_+$.

(4) Pour tout n, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ qui est toujours positive car f et g sont absolument monotones. De même, $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$ qui est toujours positive puisque $\lambda \geq 0$.

(5) Une somme à coefficients positifs de fonctions positives est positive et le produit de fonctions positives est positif. En appliquant alors la formule de Leibniz ainsi que l'absolue monotonie de f et g qui nous assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont positives, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)}$ est positive, et donc que fg est absolument monotone.

Preuve de la formule de Leibniz. (Par récurrence sur n.)
Pour $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Montrons que le rang n donne le rang $n+1$. On dérive l'égalité au rang n pour obtenir:

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k+1)} g^{(n-k)}] + \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)} g^{(n+1-k)}]\,.$$

En faisant dans la première somme le changement d'indice $j = k+1$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k+1)} g^{(n-k)}] = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} [f^{(j)} g^{(n+1-j)}]\,.$$

On regroupe à nouveau les sommes et on déduit:

$$(fg)^{(n+1)} = C_n^n f^{(n+1)} g + C_0^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} [C_n^{k-1} + C_n^k][f^{(k)} g^{(n+1-k)}]\,.$$

Maintenant, on a $C_n^n = C_0^0 = 1$ et $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ (en réduisant au même dénominateur), d'où:

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}\,.$$

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Montrer que si f et g sont absolument monotones, alors $f \circ g$ l'est aussi.