Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Contrôle continu de Mathématiques n°1

du mercredi 2 octobre 2013 – Durée : 1h30.
*Documents et calculatrices interdits.*

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

**Exercice 1. Questions de cours (4 points)**

(1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

($a$) Rappeler la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ (avec $\varepsilon, \delta$).

($b$) Montrer, en revenant à la définition de limite, que $\lim_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

(2) Rappeler la définition de fonction injective.

(3) Énoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 2. (6 points)** Déterminer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

(2) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-2}$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}$.

(4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(e^{\sqrt{x}+1}\right)}{x+2}$.

**Exercice 3. (5 points)** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

(1) Tracer l'allure du graphe de $f$ pour $-1 \leq x \leq 5$. Préciser sur le graphe les points dont les abscisses respectives sont 1 et 4.

(2) $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(3) Déterminer les limites respectives de $f$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. En déduire que $f$ est surjective.

(4) On admet que $f$ est injective. Donner la formule définissant la fonction réciproque $f^{-1}$.

**Exercice 4. (9 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et satisfaisant la propriété:

(P) $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) \in \mathbb{Z}.$$

(1) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues et satisfont la propriété (P), alors $f+g$ est continue et satisfait la propriété (P).

(2) ($a$) Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a$ la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ satisfait-elle la propriété (P)?

($b$) Donner un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non constante, satisfaisant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = 0.$$

($c$) Tracer l'allure du graphe d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non affine, satisfaisant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = 3.$$

(3) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et satisfaisant la propriété (P). On définit la fonction $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta(x) = f(x+1) - f(x)$.

($a$) Montrer que la fonction $\delta$ est continue sur $\mathbb{R}$.

($b$) Montrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction $\delta$ est constante, égale à un entier $d \in \mathbb{Z}$.

(4) Comme précédemment, on considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et satisfaisant: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = d$ pour un certain $d \in \mathbb{Z}$.

($a$) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ f(x+n) = f(x) + nd.$$

($b$) Déduire de ($a$) que $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant la propriété (P).

($c$) Déduire de ($a$) que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = d$.

**[ FIN DU CONTRÔLE ]**

---

*** Questions non notées, à faire à la maison. ***

**Exercice 4 (suite).**

On rappelle que la partie entière d'un nombre réel $y$ est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq y < k+1$. Elle est dénotée $[y]$.

(5) ($a$) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall y \in \mathbb{R}$, $|f(y - [y])| \leq M$. (<u>Indice:</u> Remarquer que pour pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq y - [y] < 1$ et utiliser un théorème du cours.)

($b$) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = f(y - [y]) + [y]d$.

($c$) Déduire de ($a$) et ($b$) que $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]} = d$ et que $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]+1} = d$.

($d$) En conclure que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y} = d$.