Polytech Paris-Sud
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Orsay 2013–2014

Correction du contrôle continu de Mathématiques n°1

du mercredi 2 octobre 2013 – Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. (4 points)

(1) (*a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

(*b*) On cherche à écrire la définition du (*a*) pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$, $x_0 = 2$ et $\ell = 5$. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x-2| < \delta$, alors $|(2x+1)-5| = |2(x-2)| < 2\delta = \varepsilon$. On a donc bien montré que $\lim_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

(2) Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) est dite injective sur E si tout élément de $\mathbb{R}$ admet au plus un antécédent dans E par f. Avec les quantificateurs, $f : E \to \mathbb{R}$ est injective sur E s'écrit: $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(3) Théorème des valeurs intermédiaires : soit $[a; b]$ un segment et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$, alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e $y \in [f(a); f(b)]$ si $f(a) \leq f(b)$, $y \in [f(b); f(a)]$ sinon), il existe $x \in [a; b]$, tel que $f(x) = y$.

Exercice 2. (6 points)

(1) On remarque que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{x-1}$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$.

(2) Par composition de limites, on obtient $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} - 3 = 0$ et $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-2} - 2 = \sqrt{2} - 2$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-2} = 0$.

(3) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1} = -\frac{x\sin(x)}{\cos(x)\sin^2(x)} = -\frac{1}{\cos(x)\frac{\sin(x)}{x}}$. Or on sait que $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$; par opérations sur les limites, $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1} = -1$.

(4) Par définition de la fonction sinus, pour tout $x \geq 0$, $-1 \leq \sin\left(e^{\sqrt{x}+1}\right) \leq 1$ et donc $\frac{-1}{x+2} \leq \frac{\sin\left(e^{\sqrt{x}+1}\right)}{x+2} \leq \frac{1}{x+2}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+2} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(e^{\sqrt{x}+1}\right)}{x+2} = 0$.

Exercice 3. (5 points)

(1) Voir la figure 1, en dernière page de ce corrigé.

(2) La fonction f est continue sur $]-\infty; 1[$ car sa restriction à cet intervalle est une fonction affine; elle est continue sur $]1; 4[$ car sa restriction à cet intervalle est une fonction polynomiale; elle est continue sur $]4; +\infty[$ car sa restriction à cet intervalle est la fonction $x \mapsto 8\sqrt{x}$. De plus

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$,

(b) $f(1) = 1^2 = 1$, et

(c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$.

Comme $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, f est continue en 1. De même, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 = 16 = \lim_{x\to 4^+} 8\sqrt{x} = \lim_{x\to 4^+} f(x)$ et $f(4) = 16$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) On calcule: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 8\sqrt{x} = +\infty$. Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f est donc surjective.

(4) On admet que f est injective. La fonction f est injective et surjective, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: elle admet une fonction réciproque f^{-1}, définie par la formule

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 1 \leq y \leq 16 \\ \frac{y^2}{64} & \text{si } y > 16 \end{cases}$$

Exercice 4. (9 points)

Le but de cet exercice est d'étudier les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et satisfaisant la propriété:

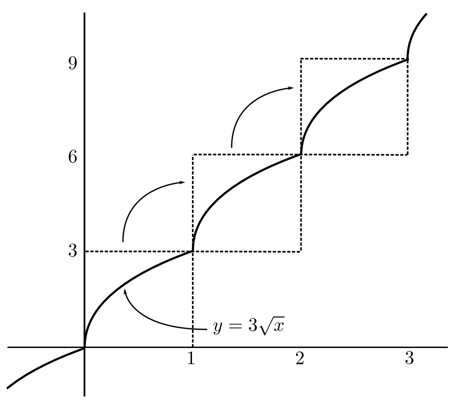
$$\text{(P)} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) \in \mathbb{Z}.$$

(1) Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et satisfaisant la propriété (P), $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}, (f+g)(x+1) - (f+g)(x) = (f(x+1) - f(x)) + (g(x+1) - g(x))$ est la somme de deux entiers car f et g satisfont (P). C'est donc un entier et $f + g$ satisfait (P).

(2) (*a*) Pour $x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = a(x+1) + b - (ax+b) = a$. Donc f satisfait (P) si et seulement si $a \in \mathbb{Z}$.

(*b*) La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2\pi x)$ convient.

(*c*) Il suffit de tracer n'importe quelle fonction continue non affine sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 3$, puis de "recoller" sur chaque intervalle $[k; k+1], k \in \mathbb{Z}$ le même motif décalé vers le haut ou le bas pour garantir la continuité. Par exemple, on peut choisir la restriction de la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x}$ à l'intervalle $[0;1]$:



(3) (*a*) La fonction δ est continue sur $\mathbb{R}$, comme différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto f(x+1)$ étant elle-même continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

(*b*) On raisonne par l'absurde. Si la fonction δ n'était pas constante, il existerait $a, b \in \mathbb{R}$ telle que $\delta(a) < \delta(b)$. On note $y = \delta(a) + \frac{1}{2}$ qui n'est pas un nombre entier et qui satisfait $\delta(a) < y < \delta(b)$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction δ continue d'après (a) sur l'intervalle $[a;b]$, on obtient l'existence d'un nombre réel $x \in [a;b]$ tel que $\delta(x) = y$. Mais c'est une contradiction, car la fonction δ ne prend que des valeurs entières, d'après la propriété (P). Donc la fonction δ doit être constante égale à un entier $d \in \mathbb{Z}$.

(4) Comme précédemment, on considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et satisfaisant: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = d$ pour un certain $d \in \mathbb{Z}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, la relation demandée est immédiate. Supposons que la relation $f(x+n) = f(x) + nd$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(x+(n+1)) = f((x+n)+1) = f(x+n) + d$ car f satisfait (P). Par l'hypothèse de récurrence on obtient, $f(x+(n+1)) = (f(x)+nd)+d = f(x)+(n+1)d$. Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et qu'elle est héréditaire, elle est vraie pour tout nombre entier naturel: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x) + nd$.

(b) La fonction $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x+1) = f(f(x+1)) = f(f(x)+d) = f(x) + d^2$ en appliquant le (a) pour $n = d$, donc $(f \circ f)(x+1) - (f \circ f)(x) = d^2$ est bien un entier. Ainsi $f \circ f$ satisfait (P).

(c) D'après (a), $\frac{f(n)}{n} = \frac{f(0)+nd}{n} = d + \frac{f(0)}{n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(0)}{n} = 0$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = d$.

[FIN DU CONTRÔLE]

*** Questions non notées, à faire à la maison. ***

Exercice 4 (suite).

(5) (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[0;1]$. D'après le théorème des valeurs extrêmes, f est donc bornée sur $[0;1]$: il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in [0;1]$, $|f(z)| \leq M$. Soit $y \in \mathbb{R}$, par définition de la partie entière, on a $0 \leq y - [y] < 1$, et donc $|f(y - [y])| \leq M$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$, en utilisant la question $(4)(a)$, avec $x = y - [y]$ qui est réel, et $n = [y]$ qui est entier, $f(y) = f((y-[y]) + [y]) = f(y-[y]) + [y]d$.

(c) Soit $y \geq 1$, d'après (b), $\frac{f(y)}{[y]} = \frac{f(y-[y])+[y]d}{[y]} = d + \frac{f(y-[y])}{[y]}$. D'après (a), $-\frac{M}{[y]} \leq \frac{f(y-[y])}{[y]} \leq \frac{M}{[y]}$. Par le théorème des gendarmes, puisque $\lim_{y\to+\infty} \frac{M}{[y]} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{M}{[y]} = 0$, on obtient que $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y-[y])}{[y]} = 0$ et par suite que $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]} = d$.
Finalement, $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]+1} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{f(y)}{[y]} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{[y]}} \right) = d$.

(d) Soit $y \geq 1$, on suppose $f(y) \geq 0$. Par définition de la partie entière, on a $\frac{f(y)}{[y]+1} \leq \frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(y)}{[y]}$. D'après la question précédente, $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{[y]+1} = d$, donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y} = d$. Si $f(y) < 0$, les inégalités sont inversées mais on peut conclure de la même façon.

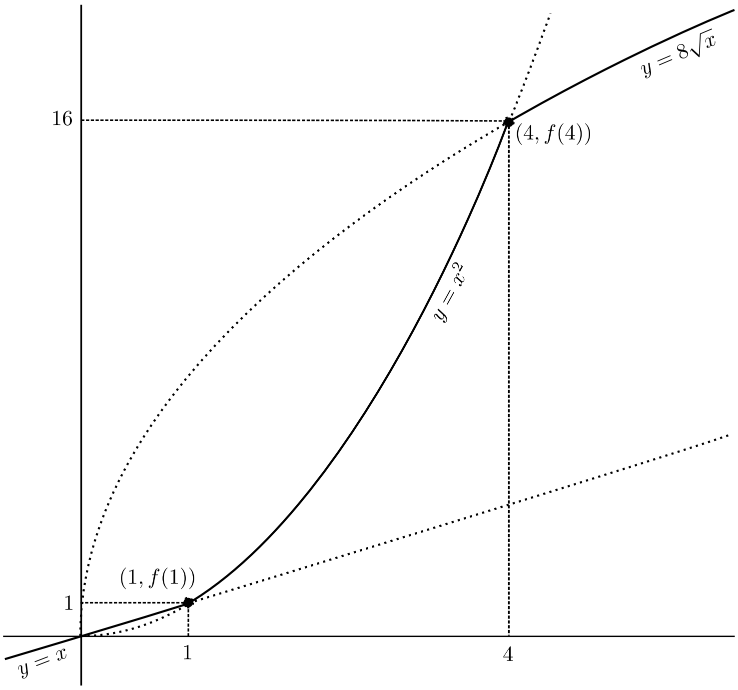


FIGURE 1. La fonction f de l'exercice 3