Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Test n°2 (octobre)

Calculatrices et documents interdits

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement votre réponse.*

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par la formule $f(x) = \frac{x}{|x|}$. La fonction $g(x) = \cos(f(x))$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

2) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0,1]$, alors la fonction $\frac{f}{(2+g)^3}$ est continue sur $[0,1]$.

3) La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = (e^{\sin x} - 1)\ln(3 + \cos\frac{1}{x})$ est prolongeable par continuité en 0.

4) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$H(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \ln(|x|) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x$. La fonction $H \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est strictement croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

6) L'image de l'intervalle $]-1,1[$ par la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est $\mathbb{R}$.

7) La fonction $x \mapsto |x| \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

8) Soit f une fonction dérivable en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0)\,.$$

9) Si f est une fonction continue en 0, vérifiant

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \ell \in \mathbb{R}\,,$$

alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$.

10) Si f est une fonction dérivable sur $[0,4]$ qui atteint son maximum en 0, alors $f'(0) = 0$.

11) Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim_{x\to-\infty} |g(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty$, alors g admet un maximum ou un minimum global.

12) La fonction définie par la formule

$$f(x) = e^x + \sin(e^x) + e^{-2x} + \cos(e^{-2x})$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

13) Il existe une fonction $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ continue et surjective.

14) Le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ de la fonction

$$\cosh x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

est $1 + x + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

15) On a la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^4} = \frac{1}{12}\,.$$

16) On a la limite suivante:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 0\,.$$

17) On a la limite suivante:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,.$$

18) La fonction $x \mapsto |x^2|$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

19) La fonction définie par la formule $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ admet un prolongement de classe C^1 au voisinage de 0. Ce prolongement est localement au-dessus de sa tangente en 0.

20) Le graphe de la fonction $f(x) = e^x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$ localement, au voisinage de 0.