Polytech Paris-Sud — Orsay 2013–2014
PeiPA 1ère année, S1
Mathématiques

Test n°1 (septembre)

Calculatrices et documents interdits

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement votre réponse.*

1) La fonction définie par la formule $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction définie par la formule $f(x) = \ln(x^2 + 6x + 9)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3) Le domaine de définition naturel de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{3-6x}{(5+x)^2}}$ est $]-\infty, -5[\cup]-5, \frac{1}{2}]$.

4) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires telles que $g \circ f$ est bien définie. Alors $g + f$ est impaire, $g \cdot f$ est paire, et $g \circ f$ est impaire.

5) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ (avec $E \subset \mathbb{R}$) une fonction paire. Si $f|_{E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante alors $f|_{E\cap\mathbb{R}^+}$ est décroissante.

6) L'image du sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $A = [-5, -2[\cup]4, 7]$, par la fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, est l'intervalle $]2, 7]$. (Une justification graphique suffit.)

7) L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(2x) + 1$ est l'intervalle $[-1, 3]$.

8) L'image réciproque de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction cosinus est l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La restriction de f à $]-1, +\infty[$ est surjective.

10) La fonction définie par l'expression $f(x) = \ln(x^2)$ est injective sur son domaine de définition naturel.

11) La restriction de la fonction sinus, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est bijective.

12) La fonction réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

13) soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction injective. Soit $A \subset E$. La restriction de f à A est une fonction injective.

14) Les limites suivantes existent et sont égales

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^5 - 4x^3 + 17)e^{\frac{1}{x}}}{4x^5 - 17x + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 17}{(2x^4 + 1)e^{\frac{1}{x}}}.$$

15) La limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+3x+4}-2}{x}$ existe et vaut $\frac{3}{4}$.

16) La limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par la formule $f(x) = \frac{1}{x}(4\sin^2(x) + 3\cos(5x))$ existe et vaut 0.

17) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par la formule

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} .$$

Les deux limites suivantes existent et sont égales:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) .$$

18) La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x > 0$ par la formule

$$f(x) = \frac{\sin(e^{\cos x} + \ln(x))}{x}$$

n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

19) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. Si $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$.

20) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.