Math 256-Révisions nombres complexes et trigonométrie

David Harari

2016-2017

1. Rappels sur les nombres complexes

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. Le nombre complexe i vérifie $i^2 = -1$, ce qui donne les règles de calcul pour additionner et multiplier deux nombres complexes :

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d); \quad (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Le réel a s'appelle la *partie réelle* de z et le réel b sa *partie imaginaire*; on les notes respectivement $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = a+ib$ (où $a, b \in \mathbf{R}$) est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. Si on représente z par un point dans le plan complexe, alors $\bar{z}$ est représenté par le symétrique de ce point par rapport à l'axe horizontal des abscisses. Observons que $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\bar{z} = z$ (cela correspond à $b = 0$).

Le *module* de z est le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ou encore $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Géométriquement, le module de z est la distance entre l'origine 0 et le point correspondant à z dans le plan complexe. On a l'inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$, valable pour tous nombres complexes z et z' (dans le plan complexe, elle traduit le fait que le plus court chemin entre l'origine et un autre point est la ligne droite !). On a aussi $|zz'| = |z||z'|$.

Remarque 1.1 Attention, il n'y a pas de relation d'ordre "raisonnable"[1] sur $\mathbf{C}$. En particulier, la notion de nombre complexe positif *n'a aucun sens*,

[1] "raisonnable" signifierait en particulier que le produit de deux nombres positifs ou de deux nombres négatifs reste positif, ce qui est exclu par le fait que $i^2 = -1$ avec -1 négatif.

tout comme celle de nombre complexe plus grand qu'un autre ou de suite croissante de nombres complexes. Ces notions sont réservées aux nombres réels.

Dans le même ordre d'idée, on ne peut pas parler de "la" racine carrée d'un nombre complexe z ni utiliser une notation telle que $\sqrt{z}$ si z n'est pas un réel positif. La raison est que tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées (opposées l'une de l'autre), et on ne peut pas les distinguer en prenant "la plus grande" puisqu'on n'a pas défini d'ordre sur $\mathbf{C}$. Par exemple, le nombre $2i$ admet $1+i$ et $-1-i$ comme racines carrées.

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe de module 1 correspond dans le plan complexe à un point du cercle de centre 0 et de rayon 1 (appelé *cercle trigonométrique*). Si t désigne l'angle correspondant à un point sur le cercle, alors l'abscisse de ce point est $\cos t$ et son ordonnée $\sin t$. Ainsi, tout complexe de module 1 s'écrit $z = \cos t + i \sin t$, avec $t \in \mathbf{R}$.

Pour tout réel t, on pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$, et on peut ensuite étendre cette définition[2] à tout nombre complexe $z = a + ib$ en utilisant les règles de calcul habituelles de l'exponentielle :

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Noter que si $t \in \mathbf{R}$, le conjugué de e^{it} est e^{-it}, et donc e^{it} est de module 1 puisque $e^{it}\overline{e^{it}} = 1$. Le réel t s'appelle *l'argument* du nombre complexe e^{it}. Notons que cet argument n'est défini qu'à 2π près, car on a $e^{2i\pi} = 1$ donc $e^{z+2i\pi} = e^z$ pour tout nombre complexe z. Rappelons aussi que $e^{i\pi} = -1$ (c'est d'ailleurs la *définition rigoureuse* du nombre π : c'est le plus petit réel $t > 0$ tel que $e^{it} = -1$). On retrouve ici que les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, et aussi les valeurs classiques $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, $\sin 0 = \sin \pi = -1$.

Si maintenant z est un nombre complexe non nul de module r, alors comme z/r est de module 1 on peut écrire $z = re^{it}$ avec $t \in \mathbf{R}$, ce qu'on appelle la *forme trigonométrique* du nombre complexe z. Notons que là

[2] En réalité, aucune définition rigoureuse du cosinus et du sinus n'ont été données dans les classes antérieures. Une façon correcte de procéder consiste à définir e^z pour tout $z \in \mathbf{C}$ comme la somme d'une série (voir le chapitre sur les séries) et à montrer l'identité $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ grâce aux propriétés des séries. On *définit* alors pour tout réel t les réels $\cos t$ et $\sin t$ comme respectivement les parties réelles et les parties imaginaires de e^{it}.

encore l'argument t n'est défini qu'à 2π près (et 0 n'a pas d'argument, car on pourrait prendre t n'importe comment).

La forme trigonométrique est particulièrement agréable pour multiplier des nombres complexes, et notamment les élever à la puissance n-ième. Comme on a $(e^{it})^n = e^{int}$, on en déduit par exemple que si n est un entier > 0, alors pour tout nombre complexe z, il existe un nombre complexe y tel que $y^n = z$: en effet on écrit $z = re^{it}$ avec $r \in \mathbf{R}_+$, et il suffit alors de prendre $y = \sqrt[n]{r}e^{it/n}$.

3. Trigonométrie

Les règles de calcul avec l'exponentielle permettent de retrouver les formules habituelles de trigonométrie, par exemple celles d'addition. Soient en effet $a, b \in \mathbf{R}$. En écrivant

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a; \quad e^{ib} = \cos b + i \sin b,$$

et en utilisant le fait que $e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$, on obtient en effet :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Cela donne d'autres formules comme $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Par ailleurs, on a $\sin x = 0$ si et seulement si $x = k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$ (on dit dans ce cas que x est *congru à zéro modulo* π) et $\cos x = 0$ si et seulement si $x = \pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$ (c'est-à-dire x congru à $\pi/2$ modulo π). De même $\cos x = 1$ (resp. -1) si et seulement si x est congru à 0 (resp. à π) modulo 2π, et $\sin x = 1$ (resp. -1) si et seulement si x est congru à $\pi/2$ (resp. à $-\pi/2$) modulo 2π. On pourra s'aider d'un dessin avec le cercle trigonométrique pour se rappeler de ces valeurs.

Définition 3.1 Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\pi/2+k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. La *tangente* de x est le réel $\tan x := \sin x/ \cos x$.

On peut de même définir la *cotangente* de x par $\operatorname{cotg} x = \cos x/ \sin x$, quand x n'est pas congru à 0 modulo π. On a $\tan(x+\pi) = \tan x$ et $\operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg}(x)$.

Enfin, il est parfois utile de définir des sortes de fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente. On observe que cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, tandis que sin est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$ et tangente est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbf{R}$. Cela justifie les définitions suivantes :

Définition 3.2 Soit $x \in [-1, 1]$. L'*arccosinus* $\arccos x$ de x est l'unique réel y de $[0, \pi]$ tel que $\cos y = x$. L'*arcsinus* $\arcsin x$ de x est l'unique réel y de $[-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin y = x$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'*arctangente* $\arctan x$ de x est l'unique y de $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan y = x$.

On fera bien attention qu'$\arccos x$ et $\arcsin x$ ne sont définis que pour $x \in [-1, 1]$.