Math 256-Transformée de Fourier

David Harari

2016-2017

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement quelques propriétés de la transformée de Fourier, qui est une sorte d'extension de la notion de coefficient de Fourier complexe. On ne donnera le plus souvent pas ici de démonstrations complètes, qui nécessiteraient des outils hors programme. On va plutôt essayer de voir comment l'utilisation de la transformée de Fourier traduit des notions comme la dérivation en des termes plus simples, ou encore permet d'avoir un analogue de la formule de Parseval, la formule de Plancherel, qui ne se limite pas aux fonctions périodiques.

1. Fonctions à support compact

Rappelons d'abord une définition classique :

Définition 1.1 Une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbf{R}$ (à valeurs réelles ou complexes) est *de classe* C^1 si elle est dérivable, de dérivée continue. On définit par récurrence pour tout entier $k > 1$ une fonction de classe C^k par la propriété qu'elle est dérivable, de dérivée C^{k-1}. Une fonction est *de classe* C^∞ si elle est de classe C^k pour tout entier $k > 0$.

Définition 1.2 Une fonction continue f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite *à support compact* s'il existe un intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a, b \in \mathbf{R}$) tel qu'on ait $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [a, b]$. On dira par abus[1] qu'une telle fonction est de plus C^∞ si elle est C^∞ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

On notera C_0^∞ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, à valeurs complexes.

[1]Avec notre définition, f est évidemment C^∞ et de dérivée nulle sur $]-\infty, a[$ et sur $]b, +\infty[$, mais elle peut ne pas avoir la même dérivée à gauche et à droite en a, ainsi qu'en b.

Remarque 1.3 Bien noter que l'intervalle $[a, b]$ en dehors duquel f est nulle dépend de la fonction f que l'on considère dans C_0^∞, on ne le fixe pas au départ.

2. Transformée de Fourier

Définition 2.1 Soit $f \in C_0^\infty$. On définit la *transformée de Fourier* de f comme la fonction $\hat{f}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie pour tout $k \in \mathbf{C}$ par la formule :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ikt} \, dt.$$

On notera l'analogie avec la définition des coefficients de Fourier complexes d'une fonction périodique. Si f est nulle en dehors de $[a, b]$, on peut calculer $\hat{f}(k)$ en prenant l'intégrale sur $[a, b]$: autrement dit, la propriété que f est à support compact permet de ne pas se soucier de la convergence de l'intégrale qui n'est pas vraiment une intégrale impropre. L'introduction de la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ peut sembler un peu bizarre (du reste, certains auteurs adoptent une convention différente pour cette constante), l'avantage de ce choix est qu'il fournit des formules symétriques pour la formule de Plancherel et la transformée de Fourier inverse, que nous verrons plus loin.

La transformée de Fourier possède plusieurs propriétés :

Proposition 2.2 *(Linéarité) Soient $f, g \in C_0^\infty$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors la transformée de Fourier $\widehat{f+g}$ de $f + g$ est $\hat{f} + \hat{g}$. La transformée de Fourier $\widehat{\lambda f}$ de λf est $\lambda \hat{f}$.*

Démonstration : C'est immédiat via la linéarité de l'intégrale. □

Proposition 2.3 *Soit $f \in C_0^\infty$. Pour tout $a \in \mathbf{C}$, définissons la fonction translatée $T_a f$ par $(T_a f)(x) = f(x - a)$. Alors on a pour tout $k \in \mathbf{C}$:*

$$\widehat{T_a f}(k) = e^{-iak} \hat{f}(k).$$

Démonstration : On a, avec le changement de variable $u = t - a$ dans l'intégrale ;

$$\widehat{T_a f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - a) e^{-ikt} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ik(u+a)} \, du,$$

ce qui donne le résultat en observant que $e^{-ik(u+a)} = e^{-iak}e^{-iku}$.

$\square$

La proposition suivante montre que la transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient à partir de celle de f en multipliant par une fonction très simple :

Proposition 2.4 *Soit $f \in C_0^\infty$. Alors la transformée de Fourier de f' est donnée par*

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k).$$

Démonstration : On calcule par une intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ikt}\,dt = [f(t)e^{-ikt}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-ik)e^{-ikt}\,dt =$$

$$(ik)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt}\,dt = ik\hat{f}(k).$$

$\square$

De façon symétrique, dériver $\hat{f}$ donne au signe près la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto xf(x)$:

Proposition 2.5 *Soit $f \in C_0^\infty$. Posons $g(x) = xf(x)$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a :*

$$(\hat{f})'(k) = -i\hat{g}(k); \quad \hat{g}(k) = i(\hat{f})'(k).$$

La deuxième formule se déduit immédiatement de la première en multipliant par i. La première formule s'obtient en calculant la dérivée de la fonction $\hat{f}$ par dérivation sous le signe $\int$ (on admet qu'on peut obtenir cette dérivée en dérivant par rapport à k dans l'intégrale qui définit $\hat{f}(k)$).

3. Convolution; formule de Plancherel

La tranformée de Fourier du produit fg de deux fonctions n'est pas le produit des transformées de Fourier de f et g. Pour récupérer ce produit, on doit introduire la notion de convolée de deux fonctions, qui est l'analogue pour les intégrales du produit de Cauchy de deux séries.

Définition 3.1 Soient f, g dans C_0^∞. On définit la *convolée* $f * g$ de f et g par la formule

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

On admettra que $(f * g)$ reste dans C_0^∞ et qu'elle vérifie la propriété suivante (qui résulte du théorème de Fubini sur les intégrales doubles) :

Theorème 3.2 *La transformée de Fourier de $f * g$ est donnée par*

$$\widehat{f * g}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

Le résultat suivant étend en un sens la formule de Parseval. Il se démontre d'ailleurs en appliquant cette formule à la fonction $2T$-périodique coïncidant avec f sur $[-T, T]$, où $T > 0$ est choisi de telle sorte que f soit nulle en dehors de $[-T, T]$.

Theorème 3.3 (Formule de Plancherel) *Soit $f \in C_0^\infty$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2\, dk.$$

4. Fonctions à décroissance rapide. Gaussienne

Comme se limiter aux fonctions à support compact est trop restrictif, on va maintenant étendre la notion de transformée de Fourier à des fonctions plus générales. On commence par un exemple très important :

Définition 4.1 On appelle *gaussienne* (ou fonction de Gauss) la fonction G de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par la formule

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bien que cette fonction ne soit pas à support compact, on observe qu'elle tend très vite vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$; plus précisément, $x^m G(x)$ tend vers 0 pour tout entier positif m, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$. On en déduit par comparaison que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)e^{-ikt}\, dt$ converge absolument, par exemple en majorant $|G(t)e^{-ikt}|$ par $\frac{M}{t^2}$, où M est une constante. Ceci permet de définir la transformée de Fourier de G par la formule habituelle

$$\widehat{G}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)e^{-ikt}\, dt.$$

Le théorème suivant dit que la gaussienne a la propriété particulière d'être sa propre transformée de Fourier :

Theorème 4.2 *Pour tout $k \in \mathbf{R}$, on a $\widehat{G}(k) = G(k)$.*

Démonstration : On va donner une idée de la preuve (sans tous les détails). On observe que $G'(x) = -xG(x)$. En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres et en utilisant les propositions 2.4 et 2.5, on obtient, pour tout $k \in \mathbf{R}$:

$$ik\widehat{G}(k) = -i(\widehat{G})'(k),$$

ou encore $(\widehat{G})'(k) = -k\widehat{G}(k)$. Ainsi G et $\widehat{G}$ vérifient la même équation différentielle linéaire du premier ordre. Un théorème classique (qu'on admettra) sur les équations différentielles dit alors que pour vérifier qu'elles sont égales, il suffit de vérifier qu'elles sont égales en un point de $\mathbf{R}$, par exemple en 0.

On a $G(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. De plus

$$\widehat{G}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Posons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Tout revient à montrer que $I = \sqrt{2\pi}$, ou encore que $I^2 = 2\pi$. Le théorème de Fubini dit qu'on peut calculer I^2 au moyen d'une intégrale double :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy.$$

En passant en coordonnées polaires, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, d'où $x^2 + y^2 = r^2$; ici r décrit $[0, +\infty[$ et θ décrit $[0, 2\pi[$. On remplace alors $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$ (cette recette vient de la formule de changement de variable dans une intégrale multiple, qui fait intervenir la valeur absolue du déterminant de la matrice des dérivées partielles du changement de variable). On obtient, en utilisant encore le théorème de Fubini :

$$I^2 = \int_0^{2\pi}(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr)\,d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr = 2\pi[-e^{-\frac{r^2}{2}}]_0^{+\infty} = 2\pi.$$

$\square$

L'exemple de la gaussienne nous amène à définir une classe de fonctions plus larges que les fonctions à support compact, pour lesquelles la transformée de Fourier existe :

Définition 4.3 On dit qu'une fonction continue de $\mathbf{R}$ (à valeurs dans $\mathbf{C}$) est *à décroissance rapide* si pour tous entiers naturels m, l, la fonction $x^m f^{(l)}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Noter qu'il est équivalent dans la définition de demander seulement que $x^m f^{(l)}$ reste bornée pour tous entiers naturels m, l (en effet si $x^{m+1} f^{(l)}$ est bornée, alors $x^m f^{(l)}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$). Par exemple, la gaussienne G est à décroissance rapide, ainsi que toute fonction de la forme $x \mapsto x^k G(x)$ avec $k \in \mathbf{N}$, ainsi que toute somme et produit par une constante d'une fonction à décroissance rapide. Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Toutes les propriétés de la transformée de Fourier vues pour les fonctions C^∞ à support compact s'étendent aux fonctions de $\mathcal{S}$. En particulier, pour une fonction $f \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier $k \mapsto \hat{f}(k)$ est bien définie et reste dans $\mathcal{S}$. On peut également appliquer la formule de Plancherel et utiliser la convolution pour ce type de fonctions.

Voici enfin une dernière définition liée à la transformée de Fourier :

Définition 4.4 Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. On définit la *transformée de Fourier inverse* $\check{f}$ par la formule

$$\check{f}(k) = \hat{f}(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ikt} \, dt.$$

Il s'agit donc, à un changement de signe près dans l'intégrale, de la même formule que pour la transformée de Fourier. Comme son nom l'indique, la transformée de Fourier inverse possède la propriété suivante :

Theorème 4.5 *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors la fonction $\check{f}$ est dans $\mathcal{S}$, et on a $\check{\hat{f}}(k) = f(k)$ pour tout $k \in \mathbf{R}$. Autrement dit $\hat{\hat{f}}(k) = f(-k)$.*

La preuve est assez longue, elle utilise à la fois le théorème de Fubini et la formule de Plancherel. Noter que la convention que nous avons prise (mettre la constante $1/\sqrt{2\pi}$ dans la définition de la transformée de Fourier) permet d'avoir une définition de la transformée de Fourier inverse tout à fait analogue à celle de la transformée de Fourier.