Feuille d'exercices 5

Séries de Fourier (I)

Exercice 1 : Soit g une fonction C^1 et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que la dérivée g' est une fonction 2π-périodique.

2. Exprimer les coefficients de Fourier complexes $c_n(g')$ de g' en fonction de ceux de g.

3. Que dire de la série de Fourier complexe de g' par rapport à celle de g ? Même question avec la série de Fourier réelle quand g est de plus supposée à valeurs réelles.

Exercice 2 : Soient les fonctions périodiques de période 2π définies par :

$$K(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x \leq 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \quad & -\pi \leq x < \pi \\ g(x) &= x \quad & -\pi \leq x < \pi \end{aligned}$$

1. Tracer les courbes représentant ces fonctions.
2. Calculer leurs coefficients de Fourier réels.

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π-périodique égale à x^2 pour $-\pi \leq x < \pi$.

1. Représenter graphiquement f.

2. Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de f.

Exercice 4 : On fixe un réel α avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Soit f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \cos(\alpha t).$$

a) Représenter graphiquement la fonction f pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) La fonction f est-elle continue ?

c) La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$? Calculer (en fonction de α) le coefficient de Fourier $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

e) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le coefficient de Fourier réel $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Démontrer que

$$\pi a_n = \frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}.$$

f) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Exercice 5 : 1. Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto e^{-it} f$ en fonction de ceux de f.

2. L'équation différentielle $y' = e^{-it} y$ a-t-elle une solution 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux (autre que la fonction nulle) ?

Exercice 6 : On considère une série trigonométrique complexe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$.

a) On suppose que pour tout entier $k > 0$, la suite $n^k c_k$ converge vers 0. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, c'est-à dire que f est dérivable, f' est elle-même dérivable etc.

c) Donner un exemple de telle fonction où tous les c_n sont des réels > 0.

d) Soit maintenant g une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $|c_n(g)| \leq M$, où $c_n(g)$ est le n-ième coefficient de Fourier complexe de g (on rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est bornée sur $[a, b]$).

e) (*) Supposons qu'on se donne une fonction g de la forme

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

où la série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Supposons de plus g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 1, montrer que la suite $(n^k c_n)$ converge vers 0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 : 1. On reprend les fonctions K, f, g de l'exercice 2. Étudier la convergence de leurs séries de Fourier.

2. Déduire de ce qui précède les sommes des séries numériques suivant es :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

La première série donne la formule de Madhava-Gregory-Leibniz (mais attention : Madhava de Sangamagrama 1350-1425, J. Gregory 1638-1675, G.W. Leibniz 16 46-1716, et J. Fourier 1768-1830).

Exercice 8 : 1. En utilisant la fonction f de l'exercice 3, Retrouver la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. En appliquant la formule de Parseval, démontrer qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$